Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	20	20	20	10	30	100
Získáno						

Zápočtová písemná práce určená k domácímu vypracování. Nutnou podmínkou pro získání zápočtu je zisk více jak 50 bodů. Pravidla jsou následující:

1. Příklady řešte samostatně bez cizí pomoci (spolužáci, starší kolegové a podobně).
2. Příklady lze řešit s použitím veškerých dosupných nástrojů (skripta, učebnice, software pro symbolické výpočty jako například Mathematica).
3. Pokud je příklad zadán ve stylu "řešte diferenciální rovnici" a pokud používáte software pro symbolické výpočty, není dovoleno použít funkce typu DSolve. Je naopak dovoleno použít bez dalšího komentáře výstup funkcí typu FourierTransform nebo Integrate. Je nutné explicitně uvést jednotlivé kroky řešení, dílčí výpočty lze svěřit software pro symbolické výpočty.
4. Pokud je příklad zadán ve stylu "najděte Fourierovu transformaci funkce" a pokud používáte software pro symbolické výpočty, není dovoleno použít funkce typu FourierTransform. Je naopak dovoleno použít bez dalšího komentáře výstup funkcí typu Apart, která provádí rozklad na parciální zlomky.
5. Numerická chyba v řešení znamená nulový bodový zisk za daný příklad.
6. Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

[20] 1. S použitím Laplaceovy transformace najděte řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - 2f = 2$$

na intervalu $(0, +\infty)$ s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} f|_{x=0} &= 0, \\ \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Řešení:

S použitím známých vztahů pro Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}[f] =_{\mathrm{def}} \int_{x=0}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x$ derivace funkce

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] &= p\mathcal{L}[f] - f(0), \\ \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right] &= p^2\mathcal{L}[f] - pf(0) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0), \end{aligned}$$

a s pomocí tabulky pro Laplaceovu transformaci, která říká, že

$$\mathcal{L}[2](p) = \frac{2}{p},$$

převedeme rovnici do tvaru

$$p^2\mathcal{L}[f] + \mathcal{L}\left[x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] - 2\mathcal{L}[f] = \frac{2}{p}.$$

Dále využijeme derivaci integrálu podle parametru, a spočteme si Laplaceovu transformaci druhého členu na levé straně,

$$\mathcal{L}\left[x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = \int_{x=0}^{+\infty} x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\mathcal{L}\left[f\right]\right),$$

kde jsme využili počáteční podmínky pro hledanou funkci f a vztah pro Laplaceovu transformaci derivace. Původní diferenciální rovnice se tudíž po Laplaceově transformaci změní na

$$p^2\mathcal{L}[f] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(p\mathcal{L}\left[f\right]\right) - 2\mathcal{L}[f] = \frac{2}{p},$$

což lze přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}[f] - \left(p - \frac{3}{p}\right)\mathcal{L}[f] = -\frac{2}{p^2}.$$

Tuto diferenciální rovnici snadno vyřešíme standardními technikami, například metodou integračního faktoru. Jest

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}[f]\,\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s} - \left(p - \frac{3}{p}\right)\mathcal{L}[f]\,\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\mathcal{L}[f]\,\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s}\right).$$

Původní rovnici pro Laplace obraz $\mathcal{L}[f]$ proto můžeme zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\mathcal{L}[f]\,\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s}\right) = -\frac{2}{p^2}\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s}.$$

Spočteme si primitivní funkci v integračním faktoru

$$\mathrm{e}^{-\int_{s=a}^{p}\left(s-\frac{3}{s}\right)\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}+3\ln p} = p^3\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}}.$$

(Využíváme toho, že potřebujeme skutečně jenom primitivní funkci, což nám umožní položit integrační konstantu rovnou nule.) Celkem proto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\mathcal{L}[f]\,p^3\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}}\right) = -2p\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}}.$$

Řešením této rovnice je

$$\mathcal{L}[f]\,p^3\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}} = 2\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2}} + C,$$

kde C je integrační konstanta. Je tedy

$$\mathcal{L}[f] = \frac{2}{p^3} + C\mathrm{e}^{\frac{p^2}{2}},$$

z čehož je vidět, že integrační konstantu musím volit rovnou nule jinak bychom na pravé straně nedostali obraz při Laplaceově transformaci. V tabulce Laplaceovy transformace dohledáme, že vzorem funkce $\frac{1}{p^3}$ je funkce $\frac{x^2}{2!}$ a výsledkem výpočtu je

$$f = x^2,$$

což je skutečně řešení původní diferenciální rovnice s příslušnými počátečními podmínkami.

[20] 2. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 + |\boldsymbol{x}|^2}.$$

Abychom se bezpečně shodli na výsledku, tak připomínám, že užíváme následující definici Fourierovy transformace

$$\mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) =_{\text{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{\xi}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde d je dimenze prostoru, na kterém pracujeme.

Řešení:

Dle definice Fourierovy transformace chceme spočíst objemový integrál

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1 + |\boldsymbol{x}|^2}\right](\boldsymbol{\xi}) =_{\text{def}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3} \frac{1}{1 + |\boldsymbol{x}|^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{\xi}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Integrál zjevně nazávisí na orientaci souřadného systému. Souřadný systém tedy zvolíme tak, aby byl vhodný pro výpočet. Pro dané $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}$ zvolíme souřadný systém tak, aby osa z souhlasila se směrem vektoru $\boldsymbol{\xi}$ a pro výpočet integrálu použijeme standardní sférické souřadnice,

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}$$

Má-li vektor $\boldsymbol{x}$ složky

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix},$$

pak jest

$$\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{\xi}|\, r \cos\theta.$$

(Vektor $\boldsymbol{\xi}$ je orientován ve směru osy z.) Po dosazení do vzorce pro Fourierovu transformaci tedy dostaneme

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3} \frac{1}{1 + |\boldsymbol{x}|^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\bullet\boldsymbol{\xi}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{1+r^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}| r\cos\theta} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Výsledný integrál spočteme známými technikami

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{1+r^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}| r\cos\theta} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{r^2}{1+r^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}| r\cos\theta} \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \begin{vmatrix} s &= \cos\theta \\ \mathrm{d}s &= -\sin\theta \,\mathrm{d}\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{r=0}^{+\infty} \int_{s=-1}^{1} \frac{r^2}{1+r^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}| rs} \,\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}\,|\boldsymbol{\xi}|\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{r=0}^{+\infty} \frac{r}{1+r^2} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|r} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|r}\right] \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Nyní si povšimneme, že platí

$$I = \frac{2}{|\boldsymbol{\xi}|\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \Im\left\{\int_{r=0}^{+\infty} \frac{r}{1+r^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|r} \,\mathrm{d}r\right\} = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \Im\left\{\int_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{r}{1+r^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|r} \,\mathrm{d}r\right\},$$

přičemž v poslední úpravě jsme využili fakt, že imaginární část integrandu je sudá funkce. Integrál

$$J =_{\text{def}} \int_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{r}{1+r^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|r} \,\mathrm{d}r$$

spočteme s pomocí integrace v komplexní rovině. Integrujeme-li funkci

$$g(z) =_{\text{def}} \frac{z}{1+z^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|z}$$

přes polokružnici v horní polorovině, to jest přes křivku

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 \cup \boldsymbol{\gamma}_2 = \left\{z = t,\, t \in (-R, R)\right\} \cup \left\{z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},\, \phi \in (0, \pi)\right\},$$

dostaneme
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}} g(z)\,\mathrm{d}z \ = J + \lim_{R\to+\infty}\int_{\phi=0}^{\pi} \frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,\mathrm{d}\phi = J.$$
Skutečnost, že druhý z integrálů v limitě vymizí, aneb
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\phi=0}^{\pi} \frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,\mathrm{d}\phi = 0,$$
snadno ověříme s pomocí technik diskutovaných na cvičení. Z residuové věty ovšem také plyne, že
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\boldsymbol{\gamma}} g(z)\,\mathrm{d}z \ = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{a\in\operatorname{int}\boldsymbol{\Gamma}} g,$$
kde $\operatorname{int}\boldsymbol{\gamma}$ značí vnitřek oblasti ohraničené křivkou $\boldsymbol{\gamma}$. Proto
$$J = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{a\in\operatorname{int}\boldsymbol{\Gamma}} g.$$
Funkce g má uvnitř křivky $\boldsymbol{\gamma}$ jen jednu singularitu a sice v bodě $a = \mathrm{i}$. Tato singularita je jednonásobným pólem, a proto platí
$$\operatorname{res}_{a=\mathrm{i}} \frac{z}{1+z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|z} = \left.\left(\frac{z}{2z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|z}\right)\right|_{z=a} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{\xi}|},$$
kde jsme použili lemma o výpočtu residua v jednonásobném pólu. Vrátíme se zpět k výpočtu Fourierovy transformace a vidíme, že
$$I \ = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\Im\left\{\int_{r=-\infty}^{+\infty}\frac{r}{1+r^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{\xi}|r}\,\mathrm{d}r\right\} = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\Im\left\{J\right\} = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\Im\left\{2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{a\in\operatorname{int}\boldsymbol{\Gamma}} g\right\} = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\,|\boldsymbol{\xi}|}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{\xi}|},$$
odkud
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+|\boldsymbol{x}|^2}\right](\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{\xi}|}.$$

[20] 3. S pomocí Fourierovy transformace vyřešte pro $x \in \mathbb{R}$ parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u,$$

kde k a γ jsou kladné konstanty, a počáteční podmínka je

$$u(x,t)|_{t=0} = f(x).$$

Nejprve odvoďte obecný vzorec pro řešení úlohy. (Obecné řešení je dáno prostřednictvím konvolučního integrálu.) Pro speciální počáteční podmínku

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

pak najděte explicitní předpis pro funkci $u(x,t)$.

Řešení:

Provedeme Fourierovu transformaci vůči proměnné x. Z tabulky pro Fourierovu transformaci víme, že

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\xi) = -\xi^2 \mathcal{F}[u](\xi),$$

což můžeme úsporně zapsat jako

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = -\xi^2 \widehat{u}.$$

Toto značení použijeme při výpočtu. Fourierova transformace dané rovnice je tedy

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -k \, \xi^2 \widehat{u} - \gamma \widehat{u}.$$

Tuto diferenciální rovnici v proměnné t řešíme s počáteční podmínkou

$$\widehat{u}|_{t=0} = \widehat{f}.$$

Řešením diferenciální rovnice s příslušnou počáteční podmínkou je funkce

$$\widehat{u} = \widehat{f} \mathrm{e}^{\left(-k\xi^2 - \gamma\right)t}.$$

Pokud dokážeme spočíst zpětnou Fourierovy transformaci $\widehat{u}$, získáme řešení původní parciální díferenciální rovnice. Potřebujeme spočíst

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\left(-k\xi^2 - \gamma\right)t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}\xi.$$

V ideálním případě se nám podaří zpětnou Fourierovu transformaci vyjádřit jako konvoluční integrál zahrnující počáteční podmínku f. V tabulce Fourierových transformací dohledáme, že platí

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-ax^2}\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}},$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[g]\,\mathcal{F}[h]\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [g \star h](x),$$

kde hvězdička značí operátor konvoluce, který je definován jako

$$[g \star h](x) =_{\mathrm{def}} \int_{y \in \mathbb{R}} g(x-y)h(y) \, \mathrm{d}y.$$

Vrátíme se zpět ke vztahu pro inverzní Fourierovu trasformaci, a vidíme, že

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\left(-k\xi^2 - \gamma\right)t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-\gamma t} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-k\xi^2 t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}\xi$$

$$= \mathrm{e}^{-\gamma t} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \widehat{\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{2kt}}\right)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \, \mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-\gamma t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f \star \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{2kt}}\right](x) = \mathrm{e}^{-\gamma t} \int_{y \in \mathbb{R}} f(x-y) \frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}} \, \mathrm{d}x,$$

přičemž v druhém členu v integrálu rozeznáváme fundamentální řešení pro rovnici vedení tepla. (To není náhoda, původní rovnice přejde po přechodu k nové neznámé $\widetilde{u} =_{\mathrm{def}} u\mathrm{e}^{\gamma t}$ na standardní rovnici vedení tepla pro funkci $\widetilde{u}$.) Můžeme tedy prohlásit, že obecné řešení zadané diferenciální rovnice s příslušnou počáteční podmínkou je dáno vzorcem

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\gamma t} \int_{y \in \mathbb{R}} f(x-y) \frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}} \, \mathrm{d}x.$$

Pokud je počáteční podmínka daná vztahem

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2},$$

pak řešení spočteme dosazením do právě odvozeného vzorce. Jest

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\gamma t} \int_{y \in \mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi kt}} \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\gamma t} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{1+4kt}}}{\sqrt{1+4kt}},$$

kde jsme použili standardní úpravu s doplněním na čtverec.

Vzorové řešení pro $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ vyvěšené na internetových stránkách 10. prosince bylo v tomto bodě chybné.

[10] 4. Spočtěte Laplaceovu transformaci funkce

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Řešení:

Laplaceovu transformaci spočteme dle definice, jest

$$\mathcal{L}[\sqrt{x}](p) = \int_{x=0}^{+\infty} \sqrt{x}\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} y^2 = x \\ 2y\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{vmatrix} = 2\int_{y=0}^{+\infty} \sqrt{y^2}\mathrm{e}^{-py^2}\,\mathrm{d}y = -2\int_{y=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p}\left(\mathrm{e}^{-py^2}\right)\,\mathrm{d}y$$
$$= -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_{y=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-py^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{\sqrt{\pi}}{p} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}p^{-\frac{3}{2}},$$

přičemž při výpočtu jsme využili větu o záměně integrálu a derivace a známou hodnotu integrálu $\int_{x=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$.

[30] 5. Ukažte, že jedním z možných řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - xf = 0,$$

je funkce

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\xi=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{\xi^3}{3} + x\xi\right)\,\mathrm{d}\xi,$$

přičemž integrál v definici je chápán ve smyslu hlavní hodnoty, aneb $f(x) = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\xi=0}^{R}\cos\left(\frac{t^3}{3} + x\xi\right)\,\mathrm{d}\xi$. Ukažte, že pro $x \to +\infty$ platí

$$f(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{4}}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}.$$

Řešení:

Pokusme se rovnici vyřešit s použitím Fourierovy transformace. Pro účely pozdější diskuse bude vhodné pracovat s rovnicí zapsanou pro neznámou funkci g,

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} - xg = 0.$$

S použitím standardních pravidel pro Fourierovu transforamci derivace a a Fourierovy transformaci funkce násobené proměnnou dostaneme, že Fourierova transformace dané ronice je

$$-\xi^2\mathcal{F}[g] - \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{F}[g] = 0.$$

Pro Fourierův obraz funkce f tedy platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{F}[g] = -\mathrm{i}\xi^2\mathcal{F}[g].$$

Řešením této rovnice je

$$\mathcal{F}[g] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\xi^3}{3}}.$$

(Integrační konstantu volíme tak, aby pro výslednou funkci f platilo $\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = 0$, což plyne z původní diferenciální rovnice.) Řešení původní diferenciální rovnice získáme jako inverzní Fourierovu transformaci funkce $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\xi^3}{3}}$, což po explicitním dosazení do vzorce pro inverzní Fourierovy transformaci dává

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\xi^3}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Nyní si stačí uvědomit, že funkce $\frac{\xi^3}{3} + \xi x$ je lichá funkce, a proto platí

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\xi^3}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi x\right)\mathrm{d}\xi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{i}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi x\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\xi=0}^{+\infty}\cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi x\right)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Funkce g definovaná jako

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\xi=0}^{+\infty}\cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi x\right)\mathrm{d}\xi$$

je tedy řešením původní obyčejné diferenticální rovnice, což jsme chtěli dokázat. (Řešíme linární diferenciální rovnici bez počátečních/okrajových podmínek. Multiplikativní konstanta tudíž nehraje žádnou roli, lze ji zvolit libovolně. Z toho plyne, že funkce f, která je od funkce g liší o multiplikativní konstantu, je také řešením původní rovnice.)

Asymptotický rozvoj pro $x \to +\infty$ lze získat různými technikami. V zásadě lze buď pracovat přímo s diferenciální rovnicí nebo lze využít integrálního vztahu pro řešení diferenciální rovnice. Ukážeme si druhou techniku, která vychází přímo z integrálního vztahu pro řešení. Pro funkci f platí

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\xi=0}^{+\infty}\cos\left(\frac{\xi^3}{3} + x\xi\right)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{\xi^3}{3} + x\xi\right)\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\eta=-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{\frac{\eta^3}{3} - x\eta}\,\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma=\{z\in\mathbb{C},\, z=\mathrm{i}t,\, t\in(-\infty,\infty)\}}\mathrm{e}^{\frac{z^3}{3} - xz}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Výsledkem je křivkový integrál v komplexní rovině. Nyní zdeformujeme integrační křivku $\boldsymbol{\gamma}$, namísto přímky $z = \mathrm{i}t$, $t \in (-\infty, +\infty)$ budeme integrovat podél přímky $z = \delta + \mathrm{i}t$, $t \in (-\infty, +\infty)$, z residuové věty víme, že je to totéž. (Podobné triky známe z příkladů na Laplaceovu transformaci.) Po úpravě integrační křivky dostaneme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{(\delta+\mathrm{i}t)^3}{3} - x(\delta+\mathrm{i}t)} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{\delta^3}{3} - \delta t^2 - x\delta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\delta^2 t - \frac{t^3}{3} - xt\right)} \,\mathrm{d}t.$$

Nyní zvolíme $\delta = \sqrt{x}$, což vede k tomu, že exponenciála s komplexní jednotkou *neobsahuje členy s proměnnou* x. Skutečne, pro $\delta = \sqrt{x}$ dostaneme

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{\delta^3}{3} - \delta t^2 - x\delta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\delta^2 t - \frac{t^3}{3} - xt\right)} \,\mathrm{d}t \right)\bigg|_{\delta=\sqrt{x}} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t^3}{3}} \,\mathrm{d}t.$$

Integrál rozepíšeme jako

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}t^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t^3}{3}} \,\mathrm{d}t = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}t^2} \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) \mathrm{d}t - \mathrm{i} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}t^2} \sin\left(\frac{t^3}{3}\right) \mathrm{d}t,$$

přičemž imaginární část je identicky rovná nule, neboť integrand je zjevně lichá funkce. Nyní konečně přichází čas pro aproximaci. Uvědomíme si, že chceme popsat asymptotické chování pro velká x, což znamená, že

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}t^2} \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) \mathrm{d}t \approx \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}t^2} \,\mathrm{d}t.$$

(Exponenciální člen stlačí hodnotu integrandu k nule mnohme dříve než se stačí projevit vliv oscilace kvůli členu $\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)$.) Poslední integrál lze vyčíslit,

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}t^2} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{x^{\frac{1}{2}}}},$$

což po dosazení vede na

$$f(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{4}}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}.$$

Funkce f, kterou jsme zkoumali se jmenuje *Airy function.* Budete-li pečlivě hledat v různých zdrojích, jistě narazíte i na odvození asymptotického chování pomocí prvně jmenované techniky, tedy pouze s použitím difrenciální rovnice.