[NEPOVINNÉ] Promyslete znovu konstrukci funkce $\sqrt{\mathbb{A}}$, kde $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ je symetrická pozitivně definitní matice. Chceme-li definovat odmocninu z matice, máme k dispozici několik přístupů.

1. První přístup je založen na spektrálním rozkladu matice $\mathbb{A}$. Je-li spektrální rozklad matice $\mathbb{A}$ dán vztahem

$$\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_i, ,$$

kde $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$ jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^3$ jsou odpovídající navzájem kolmé jednotkové vlastní vektory matice $\mathbb{A}$, pak funkce $\mathfrak{f}(\mathbb{A})$ je definována vztahem

$$\mathfrak{f}(\mathbb{A}) =_{\mathrm{def}} \sum_{i=1}^{3} f(\lambda_i) \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_i$$

S využitím této definice spočtěte $\sqrt{\mathbb{A}}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mělo by vám vyjít, že

$$\sqrt{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{13}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Druhý přístup je založen na využití Cauchyho vzorce pro integraci podél křivky v komplexní rovině. Z minulého semestru víme, že platí

$$f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (\zeta - z)^{-1} f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta.$$

Chceme-li definovat $\mathfrak{f}(\mathbb{A})$ můžeme se pokusit doslova opsat známý vzorec, definujeme tedy

$$\mathfrak{f}(\mathbb{A}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (\zeta \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta,$$

kde γ je křivka zvolená tak, že spektrum matice $\mathbb{A}$ (všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$) leží uvnitř křivky γ.

V našem případě potřebujeme spočíst

$$\int_\gamma (\zeta \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \sqrt{\zeta} \,\mathrm{d}\zeta,$$

Výpočet integrálu můžeme provést velmi snadno, pokud se nám podaří převést $(\zeta \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ do diagonálního tvaru. Uvažujme tedy rozklad

$$(\zeta \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} = \left(\zeta \mathbb{I} - \mathbb{C}\mathbb{J}\mathbb{C}^{-1}\right)^{-1} = \mathbb{C} \left(\zeta \mathbb{I} - \mathbb{J}\right)^{-1} \mathbb{C}^{-1},$$

kde $\mathbb{J}$ je diagonální matice s vlastními čísly matice $\mathbb{A}$ na diagonále a $\mathbb{C}$ je transformační matice jejíž sloupce tvoří vlastními vektory $\mathbb{A}$. Použijeme-li převod na diagonální tvar, můžeme pokročit s výpočtem křivkového integrálu

$$\int_\gamma (\zeta \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \sqrt{\zeta} \,\mathrm{d}\zeta = \mathbb{C} \left\{ \int_\gamma (\zeta \mathbb{I} - \mathbb{J})^{-1} \sqrt{\zeta} \,\mathrm{d}\zeta \right\} \mathbb{C}^{-1} = \mathbb{C} \left\{ \int_\gamma \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_3} \end{bmatrix} \mathrm{d}\zeta \right\} \mathbb{C}^{-1},$$

kde λ_i jsou vlatní čísla matice $\mathbb{A}$. Integrál spočteme s použitím residuové věty,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_3} \end{bmatrix} \mathrm{d}\zeta &= \begin{bmatrix} \int_\gamma \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_1} \mathrm{d}\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \int_\gamma \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_2} \mathrm{d}\zeta & 0 \\ 0 & 0 & \int_\gamma \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_3} \mathrm{d}\zeta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}_{\zeta = \lambda_1} \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}_{\zeta = \lambda_2} \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}_{\zeta = \lambda_1} \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - \lambda_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi \mathrm{i} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi \mathrm{i} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \mathrm{i} \sqrt{\lambda_3} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

kde jsme využili fakt, že všechny singularity jsou jednonásobnými póly. Výsledkem výpočtu je tedy

$$\sqrt{\mathbb{A}} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (\zeta \mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \sqrt{\zeta} \,\mathrm{d}\zeta = \mathbb{C} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{-1},$$

což totéž jako v předchozím případě. (Ověřte to přímým výpočtem.)