1. Ukažte, že funkcionál

$$\int_{s=0}^{1} \sqrt{\mathrm{g}_{ij} \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}s}} \, \mathrm{d}s$$

má extrém pro křivku $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{ext}}$, která je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 {\gamma_{\mathrm{ext}}}^l}{\mathrm{d}s^2} - \Gamma^l{}_{ij} \frac{\mathrm{d}{\gamma_{\mathrm{ext}}}^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}{\gamma_{\mathrm{ext}}}^i}{\mathrm{d}s} = 0$$

s příslušnými okrajovými podmínkami. (Značení odpovídá značení z přednášky.) Při výpočtu využijte skutečnosti, že křivku $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{ext}}$, která odpovídá extrému daného funkcionálu, lze bez újmy na obecnosti parametrizovat délkou oblouku, což znamená, že

$$\sqrt{\mathrm{g}_{ij} \frac{\mathrm{d}{\gamma_{\mathrm{ext}}}^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}{\gamma_{\mathrm{ext}}}^j}{\mathrm{d}s}} = 1,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \sqrt{\mathrm{g}_{ij} \frac{\mathrm{d}{\gamma_{\mathrm{ext}}}^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}{\gamma_{\mathrm{ext}}}^j}{\mathrm{d}s}} = 0.$$

Při výpočtu by se vám mohl hodit vzorec pro vztah mezi Christoffelovými symboly $\Gamma^l{}_{ij}$ a metrickým tenzorem g_{ij}, najděte si ho v zápiscích z přednášky!