1. Na intervalu $(0,1)$ uvažujte posloupnost funkcí

$$f_n(x) =_{\mathrm{def}} nx^{n-1} - (n+1)x^n$$

a řadu

$$f(x) =_{\mathrm{def}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Ukažte, že:

- Částečný součet řady

$$g_M(x) =_{\mathrm{def}} \sum_{n=1}^{M} f_n(x)$$

je dán vzorcem $g_M(x) = 1 - (M+1)x^M$.

- Řadu lze na intervalu $(0,1)$ bez problémů sečíst a platí

$$f(x) = 1.$$

- Integrujeme-li jednotlivé členy řady, dostaneme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- Integrujeme-li součet řady, dostaneme

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

- Nelze tedy zaměnit limitu a součet řady. Z toho je zřejmé, že *nemůže* existovat integrovatelná funkce g na intervalu $(0,1)$, tak, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a skoro všechna $x \in (0,1)$ platilo $|g_M(x)| \leq g(x)$. Dokažte to přímo! (Je to zjevné, nevím, proč jsem na cvičení zaváhal. Omlouvám se.)

2. Dokažte, že platí

$$\int_0^{+\infty} \left(\cos\sqrt{x}\right) \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$