1. Vzorec, který je možné najít v matematicko-fyzikálních tabulkách říká, že plošný obsah plochy $S \subset \mathbb{R}^3$ zadané jako graf funkce $f(x,y)$ je možné spočíst podle vzorce

$$\mathrm{povrch}(S) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Ukažte, že tento vzorec je speciálním případem obecného vzorce pro výpočet plošného obsahu. Tvrzení "plocha je zadána jako graf funkce" znamená, že

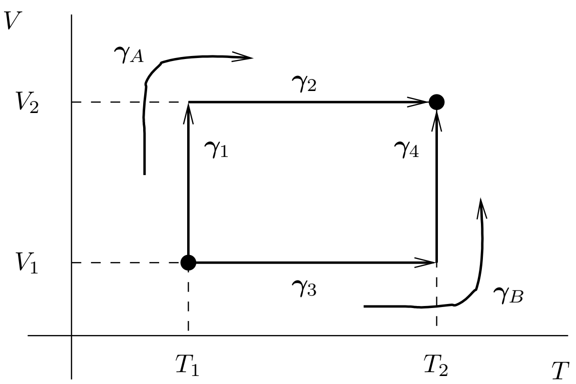
$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x \in (a,b), \; y \in (c,d), \; z = f(x,y) \right\}.$$

2. Uvažujte vektorové pole $\boldsymbol{Y}$ v $\mathbb{R}^2$, kde souřadnice bodů jsou označeny písmeny T a V, to jest $[T,V] \in \mathbb{R}^2$, a vektorové pole je dáno předpisem

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} -c_{\mathrm{V}} \\ -n\frac{R_{\mathrm{m}}T}{V} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

kde c_{V}, n a R_{m} jsou kladné konstanty.

- Je dané vektorové pole potenciální? Aneb existuje (skalární) funkce $\phi(T,V)$ tak, že $\boldsymbol{Y} = \nabla\phi$, aneb $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial T} & \frac{\partial \phi}{\partial V} \end{bmatrix}^\top$? (Použijte větu z přednášky.)
- Zadefinujte nové vektorové pole vztahem $\boldsymbol{Z} = \frac{1}{T}\boldsymbol{Y}$. Je dané vektorové pole potenciální? Aneb existuje (skalární) funkce $\psi(T,V)$ tak, že $\boldsymbol{Z} = \nabla\psi$, aneb $\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial T} & \frac{\partial \psi}{\partial V} \end{bmatrix}^\top$? (Použijte větu z přednášky.)
- Spočtěte explicitně křivkový integrál $\int_{\boldsymbol{\gamma}_A} \boldsymbol{Y} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}$, kde křivka $\boldsymbol{\gamma}_A = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$, viz Obrázek 1.
- Spočtěte explicitně křivkový integrál $\int_{\boldsymbol{\gamma}_B} \boldsymbol{Y} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}$, kde křivka $\boldsymbol{\gamma}_B = \boldsymbol{\gamma}_3 + \boldsymbol{\gamma}_4$, viz Obrázek 1.
- Ukažte, že $\int_{\boldsymbol{\gamma}_A} \boldsymbol{Y} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} \neq \int_{\boldsymbol{\gamma}_A} \boldsymbol{Y} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}$.
- Spočtěte explicitně křivkový integrál $\int_{\boldsymbol{\gamma}_A} \boldsymbol{Z} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}$, kde křivka $\boldsymbol{\gamma}_A = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$, viz Obrázek 1.
- Spočtěte explicitně křivkový integrál $\int_{\boldsymbol{\gamma}_B} \boldsymbol{Z} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}$, kde křivka $\boldsymbol{\gamma}_B = \boldsymbol{\gamma}_3 + \boldsymbol{\gamma}_4$, viz Obrázek 1.
- Ukažte, že $\int_{\boldsymbol{\gamma}_A} \boldsymbol{Z} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{\gamma}_A} \boldsymbol{Z} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{l}$.
- [Nepovinné.] Rozmyslete si fyzikální interpretaci celého výpočtu.



Obrázek 1: Křivky v TV prostoru.