Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Uvažujte proudění nestlačitelné Navier–Stokes tekutiny v rovinném kanálu. V bezrozměrných proměnných se tedy zajímáme o proudění popsané soustavou rovnic

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v}, \tag{1a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1b}$$

s okrajovou podmínkou

$$\mathbf{v}\big|_{y=\pm1} = \mathbf{0}. \tag{1c}$$

Rychlostní pole $\mathbf{V}$, které je řešením úlohy (1) za předpokladu konstatního tlakového gradientu ve směru osy z, je rychlostní pole s parabolickým profilem,

$$\mathbf{V} = \mathrm{V}^{\hat{z}}\mathbf{e}_{\hat{z}}, \tag{2}$$

kde $\mathrm{V}^{\hat{z}} = (1-r^2)$.

Zajímáme se o časovou evoluci porušeného rychlostního pole $\mathbf{v} = \mathbf{V}+\mathbf{v}'$, kde porucha $\mathbf{v}'$ splňuje stejné okrajové podmínky jako $\mathbf{V}$ a navíc je *periodická* ve směru osy z.

1. Připomeňte si, že linearizovaná evoluční rovnice pro poruchy $\mathbf{v}'$ vůči základnímu rychlostnímu poli $\mathbf{V}$ je

$$\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}'\bullet\nabla)\,\mathbf{V} + (\mathbf{V}\bullet\nabla)\,\mathbf{v}' = -\nabla p' + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v}'. \tag{3}$$

   Ukažte, že aplikací operátoru divergence na evoluční rovnici pro poruchy lze odvodit diferenciální rovnici pro tlak p' ve tvaru

$$-\Delta p' = 2\,(\nabla\mathbf{v}'):(\nabla\mathbf{V})^{\top}. \tag{4}$$

2. Využijte vztah (4) a zformulujte evoluční rovnici pro $\Delta\mathbf{v}'$ (Laplaceův operátor aplikovaný na vektor $\mathbf{v}'$.) Tuto rovnici označte (A).
3. Zformulujte evoluční rovnici pro $\operatorname{rot}\mathbf{v}'$ (Laplaceův operátor aplikovaný na vektor $\mathbf{v}'$.) Tuto rovnici označte (B).
4. Předpokládejte, že rychlostní pole $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(\mathbf{x},t)$ je dáno ve tvaru

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x},t) = \tilde{\mathbf{v}}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta x+\alpha z-\omega t)}, \tag{5}$$

   kde $\tilde{\mathbf{v}}(y)$ je komplexní funkce proměnné y, α a β jsou reálná čísla a ω je komplexní číslo.

   (a) Ukažte, že pokud je splněna okrajová podmínka $\mathbf{v}'(\mathbf{x},t)\big|_{y=\pm1} = 0$, pak pro vektor $\tilde{\mathbf{v}}(y)$ platí okrajové podmínky

$$\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}}\big|_{y=\pm1} = 0, \tag{6a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}}}{\mathrm{d}y}\right|_{y=\pm1} = 0. \tag{6b}$$

   (b) Ukažte, že pokud známe y složku rychlostního pole $\tilde{\mathbf{v}}$, to jest $\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}}$, a dále y složku rotace rychlostního pole $\tilde{\mathbf{v}}$, to jest $(\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{v}})^{\hat{y}}$, pak dokážeme kompletně zrekonstruovat *všechny složky* vektoru $\tilde{\mathbf{v}}$. (Najděte prosím explicitní vztah pro $\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{x}}$ a $\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{z}}$ jakožto funkcí $\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}}$ a $(\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{v}})^{\hat{y}}$.)

   (c) Uvědomte si, že pokud je imaginární část ω kladná, pak porucha $\mathbf{v}'$ roste v čase.

5. Použijte (5) a rovnici (A) a ukažte, že y složka rychlostního pole $\tilde{\mathbf{v}}$, to jest $\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}}$, splňuje rovnici

$$\left(-\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}\alpha\mathrm{V}^{\hat{z}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-k^2\right)\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}} - \mathrm{i}\alpha\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}^{\hat{z}}}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-k^2\right)^2\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}}, \tag{7a}$$

   kde $k^2 =_{\mathrm{def}} \alpha^2+\beta^2$. Použijte (5) a rovnici (B) a ukažte, že y složka rotace rychlostního pole $\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{v}}$, to jest $\tilde{\eta}^{\hat{y}} =_{\mathrm{def}} (\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{v}})^{\hat{y}}$, splňuje rovnici

$$\left(-\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}\alpha\mathrm{V}^{\hat{z}}\right)\tilde{\eta}^{\hat{y}} + \mathrm{i}\beta\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}}\frac{\mathrm{d}\mathrm{V}^{\hat{z}}}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-k^2\right)\tilde{\eta}^{\hat{y}}. \tag{7b}$$

6. Uvažujte Orr–Sommerfeld rovnici

$$\left(-\mathrm{i}\omega+\mathrm{i}\alpha\mathrm{V}^{\hat{z}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-\alpha^2\right)\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}} - \mathrm{i}\alpha\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{V}^{\hat{z}}}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-\alpha^2\right)^2\tilde{\mathrm{v}}^{\hat{y}},$$

kde okrajové podmínky jsou dány (6). (To jest rovnici (7a) s $\beta = 0$.) Úloha má zjevně tvar

$$\mathrm{i}\omega \mathbb{B}\tilde{v}^{\hat{y}} = \mathbb{A}\tilde{v}^{\hat{y}}, \tag{8}$$

kde $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou diferenciální operátory, což je zobecněný problém pro vlastní čísla ω. Použijte vaši oblíbenou numerickou metodu a najděte vlastní čísla ω pro hodnoty parametrů $\mathrm{Re} = 6000$, $\alpha = 1.020$ a $\mathrm{Re} = 5000$, $\alpha = 1.020$. (Vlastní čísla vykreslete v komplexní rovině a uveďte numerické hodnoty prvních tří vlastních čísel, řazeno vzestupně podle velikosti imaginární části.)

Diskuse: Celý problém stability proudění se nám podařilo redukovat na úlohu hledání vlastních čísel jistých jednoduchých diferenciálních perátorů. Pro zvolené Reynoldsovo číslo Re postupně procházíme všechna α a zkoumáme, zda všechna vlastní čísla problému (8) mají zápornou imginární část. Pokud ano, proudění je v daném režimu, to jest pro dané Reynoldsovo číslo, lineárně stabilní. Pokud pro dané Reynoldsovo číslo Re existuje α takové, že alespoň jedno vlastní číslo úlohy (8) má kladnou imaginární část, tak je proudění v daném režimu lineárně nestabilní.

Návod: Diskusi numerického řešení Orr–Sommerfeld rovnice najdete například v pracích Trefethen (2000) a Weideman and Reddy (2000). Tamtéž jsou dosupné vzorové skripty v prostředí MATLAB, které můžete využít k řešení zadané úlohy. (Pokud byste měli potíže se získáním zmíněných textů, tak mně prosím napište email a já vám pošlu kopii.)

Poznámka: V průběhu řešení jsme "zahodili" rovnici (7b) a zvolili jsme $\beta = 0$. Samozřejmě pro to existuje dobrý důvod. V případě, že vás tato záhada zajímá, můžete si přečíst původní článek Squire (1933).

Reference

Squire, H. B. (1933). On the stability of three dimensional disturbances of viscous fluid between parallel walls. *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A 142*, 621–628.

Trefethen, L. N. (2000). *Spectral methods in MATLAB*, Volume 10 of *Software, Environments, and Tools.* Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

Weideman, J. A. and S. C. Reddy (2000). A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Trans. Math. Softw. 26*(4), 465–519.