Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Na přednášce jsme ukázali, že vztahy pro derivaci tečných vektorů $\{\mathbf{t}_\alpha\}_{\alpha=1}^{2}$ k ploše S vnořené do $\mathbb{R}^3$ a příslušného normálového vektoru $\mathbf{n}$ jsou

$$\frac{\partial \mathbf{t}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\mathbf{t}_\gamma + \mathrm{b}_{\alpha\beta}\mathbf{n},$$
$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} = -\mathrm{g}^{\gamma\beta}\mathrm{b}_{\beta\alpha}\mathbf{t}_\gamma.$$

Spočtěte explicitně $\frac{\partial^2 \mathbf{t}_\alpha}{\partial u^\delta \partial u^\beta}$ a $\frac{\partial^2 \mathbf{t}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\delta}$ a ukažte, že záměnnost parciálních derivací

$$\frac{\partial^2 \mathbf{t}_\alpha}{\partial u^\delta \partial u^\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{t}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\delta}$$

je splněna pokud platí rovnice

$$\mathrm{R}_{\psi\beta\delta\alpha} = \mathrm{b}_{\alpha\beta}\mathrm{b}_{\psi\delta} - \mathrm{b}_{\alpha\delta}\mathrm{b}_{\psi\beta},$$
$$\mathrm{b}_{\alpha\beta}\big|_\delta - \mathrm{b}_{\alpha\delta}\big|_\beta = 0,$$

kde

$$\mathrm{R}^{\gamma}{}_{\alpha\delta\beta} =_{\mathrm{def}} \frac{\partial \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} - \frac{\partial \Gamma^{\gamma}{}_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} + \Gamma^{\gamma}{}_{\rho\delta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\delta\beta}$$

je Riemannův tenzor křivosti generovaný plošnou metrikou a

$$\mathrm{b}_{\alpha\beta}\big|_\delta =_{\mathrm{def}} \frac{\partial \mathrm{b}_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} - \mathrm{b}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\delta} - \mathrm{b}_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\delta\alpha}$$

je kovariantní derivace opět generovaná plošnou metrikou.