Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Uvažujte *symetrickou* matici v $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Najděte vztah mezi operátorovou normou $\mathbb{A}$

$$|\mathbb{A}|_{\text{operator}} =_{\text{def}} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2, \mathbf{v}\neq\mathbf{0}} \frac{|\mathbb{A}\mathbf{v}|_{\mathbb{R}^2}}{|\mathbf{v}|_{\mathbb{R}^2}},$$

kde $|\mathbf{u}|_{\mathbb{R}^2} =_{\text{def}} \sqrt{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}$, a vlastními čísly $\lambda_1$, $\lambda_2$ matice $\mathbb{A}$. Najděte vztah mezi Frobenius normou

$$|\mathbb{A}|_{\text{Frobenius}} =_{\text{def}} \left(\operatorname{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{A}^\top)\right)^{\frac{1}{2}},$$

a vlastními čísly $\lambda_1$, $\lambda_2$ matice $\mathbb{A}$.

Diskutujte (pro obecnou matici $\mathbb{A}$) vztah mezi oběma normami. Ukažte, že tyto normy jsou ekvivalentní, to jest že existují kladné konstanty $c_1$ a $c_2$ tak, že

$$c_1 |\mathbb{A}|_{\text{operator}} \leq |\mathbb{A}|_{\text{Frobenius}} \leq c_2 |\mathbb{A}|_{\text{operator}}$$

platí pro libovolnou matici $\mathbb{A}$.

2. Cauchyho tenzor napětí pro stlačitelnou Navier–Stokes tekutinu je dán vztahem

$$\mathbb{T} = -p(\rho,\theta)\mathbb{I} + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D},$$

kde $\lambda$ a $\mu$ jsou konstanty. Ukažte, že rovnice bilance hybnosti

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div}\mathbb{T} + \rho\mathbf{b}$$

má pro tuto tekutinu tvar

$$\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p(\rho,\theta) + (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{v}) + \mu\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{b}.$$

Předpokládejte, že objemová síla $\mathbf{b}$ má potenciál, to jest $\mathbf{b} = -\nabla\varphi$. Předpokládejte dále, že $p = p(\rho)$. Ukažte, že evoluční rovnice pro rotaci $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega} =_{\text{def}} \operatorname{rot}\mathbf{v}$, je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\operatorname{div}\mathbf{v} - \mathbb{D}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \frac{\mu}{\rho}\left(\Delta\boldsymbol{\omega} - \left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)\times\Delta\mathbf{v}\right) + \operatorname{rot}\left(\frac{\lambda+\mu}{\rho}\nabla(\operatorname{div}\mathbf{v})\right).$$

Návod: Rozmyslete si, že materiálovou derivaci Euler rychlostního pole $\mathbf{v}$ lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathbf{v})\times\mathbf{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}\right).$$

Ukažte, že pokud je $\boldsymbol{\omega} =_{\text{def}} \operatorname{rot}\mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je Euler rychlostní pole, pak platí $\mathbb{L}\boldsymbol{\omega} = \mathbb{D}\boldsymbol{\omega}$.