Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

1. Buď $\mathbb{A}$ antisymetrická matice

$$\mathbb{A} =_{\mathrm{def}} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{13} \\ -\mathrm{A}_{12} & 0 & \mathrm{A}_{23} \\ -\mathrm{A}_{13} & -\mathrm{A}_{23} & 0 \end{bmatrix},$$

   taková, že $\mathrm{A}_{12}^2 + \mathrm{A}_{13}^2 + \mathrm{A}_{23}^2 = 1$, a buď $\varphi \in [0, 2\pi)$ libovolné číslo. Ukažte, že

$$\mathrm{e}^{\varphi \mathbb{A}} = \mathbb{I} + (\sin\varphi)\,\mathbb{A} + (1 - \cos\varphi)\,\mathbb{A}^2.$$

   (Vzpomeňte si na Cayley–Hamilton větu.)

2. Spočtěte Gâteaux derivace invariantů matice $\mathbb{A}$ ve směru $\mathbb{B}$, to jest spočtěte

$$\frac{\partial \operatorname{Tr} \mathbb{A}}{\partial \mathbb{A}}[\mathbb{B}],$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{A}} \left(\frac{1}{2} (\operatorname{Tr} \mathbb{A})^2 - \operatorname{Tr}\left(\mathbb{A}^2\right) \right) [\mathbb{B}],$$

$$\frac{\partial \det \mathbb{A}}{\partial \mathbb{A}}[\mathbb{B}].$$

   Připomínám, že pro Gâteaux derivaci používáme následující značení

$$\frac{\partial f(\mathbb{A})}{\partial \mathbb{A}}[\mathbb{B}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(f(\mathbb{A} + \tau \mathbb{B}) \right)\Big|_{\tau=0},$$

   které je běžné v mechanice kontinua (a obecně ve fyzice).