

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Uvažujte cylindrické souřadnice v \mathbb{R}^3 , to jest

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad (1a)$$

$$x_2 = r \sin \varphi, \quad (1b)$$

$$x_3 = z. \quad (1c)$$

1. Najděte bázové vektory křivočaré báze \mathbf{g}_r , \mathbf{g}_φ a \mathbf{g}_z a bázové vektory příslušné duální báze \mathbf{g}^r , \mathbf{g}^φ a \mathbf{g}^z . Spočítejte normy těchto vektorů.
2. Najděte složky metrického tenzoru g_{mn} a inverze k metrickému tenzoru g^{ij} .
3. Zjistěte, jaký je vztah mezi složkami vektorů v^r , v^φ a v^z vůči nenormované bázi \mathbf{g}_r , \mathbf{g}_φ a \mathbf{g}_z a složkami vektorů $v^{\hat{r}}$, $v^{\hat{\varphi}}$ a $v^{\hat{z}}$ vůči normované bázi $\mathbf{g}_{\hat{r}}$, $\mathbf{g}_{\hat{\varphi}}$ a $\mathbf{g}_{\hat{z}}$ (fyzikální složky vektorů).
4. Najděte Christoffelovy symboly Γ^m_{jl}
5. Spočítejte $\nabla \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} = v^r \mathbf{g}_r + v^\varphi \mathbf{g}_\varphi + v^z \mathbf{g}_z$. Výsledek vyjádřete vůči normované bázi $\mathbf{g}_{\hat{r}}$, $\mathbf{g}_{\hat{\varphi}}$ a $\mathbf{g}_{\hat{z}}$ a s použitím složek \mathbf{v} vůči normované bázi. Měli byste dospět k rovnosti

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial r} & \frac{\partial v^{\hat{\varphi}}}{\partial r} & \frac{\partial v^{\hat{z}}}{\partial r} \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^{\hat{\varphi}}}{r} \right) + \frac{v^{\hat{\varphi}}}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial \varphi} - \frac{v^{\hat{\varphi}}}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial \varphi} + \frac{v^{\hat{\varphi}}}{r} \\ \frac{\partial v^{\hat{r}}}{\partial z} & \frac{\partial v^{\hat{\varphi}}}{\partial z} & \frac{\partial v^{\hat{z}}}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

6. Spočítejte $\text{div } \mathbb{T}$, kde $\mathbb{T} = T^r_r \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^r + \dots + T^z_z \mathbf{g}_z \otimes \mathbf{g}^z$, aneb (vůči nenormované bázi)

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} T^r_r & T^r_\varphi & T^r_z \\ T^\varphi_r & T^\varphi_\varphi & T^\varphi_z \\ T^z_r & T^z_\varphi & T^z_z \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Výsledek vyjádřete vůči normované bázi $\mathbf{g}_{\hat{r}}$, $\mathbf{g}_{\hat{\varphi}}$ a $\mathbf{g}_{\hat{z}}$ a s použitím složek \mathbb{T} vůči normované bázi. Měli byste dospět k rovnosti

$$\text{div } \mathbb{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{\hat{r}}_{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T^{\hat{\varphi}}_{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} - T^{\hat{\varphi}}_{\hat{\varphi}} + T^{\hat{r}}_{\hat{r}} \right) + \frac{\partial T^{\hat{z}}_{\hat{z}}}{\partial z} \\ \frac{\partial T^{\hat{\varphi}}_{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T^{\hat{\varphi}}_{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + T^{\hat{r}}_{\hat{\varphi}} + T^{\hat{\varphi}}_{\hat{r}} \right) + \frac{\partial T^{\hat{\varphi}}_{\hat{z}}}{\partial z} \\ \frac{\partial T^{\hat{z}}_{\hat{r}}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T^{\hat{z}}_{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi} + T^{\hat{z}}_{\hat{r}} \right) + \frac{\partial T^{\hat{z}}_{\hat{z}}}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (4)$$