Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Skupina: ______________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	12	14	8	10	6	50
Získáno						

[12] 1. Napiště obecný tvar Taylorova rozvoje (s Lagrangeovým tvarem zbytku) pro funkci f v bodě z_0.
Odvoďte Taylorův rozvoj funkce

$$f(z) = \sqrt[3]{1+z},$$

v bodě $z_0 = 0$.
Užitím Taylorových rozvojů vhodných funkcí spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1-\cos x)}{\sin^4 x + e - e^{\sqrt[3]{1-x^2}}}.$$

Řešení:
Obecný tvar Taylorova rozvoje je:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^k,$$

kde $\xi \in (x_0, x)$.
Dosazením do výše uvedeného vzorce dostaneme

$$\sqrt[3]{1+z} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3}{k} z^k + \mathrm{o}\left(z^k\right),$$

kde $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
Víme, že platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{o}\left(x^5\right),$$

ze vztahu pro obecný Taylorův rozvoj snadno zjistíme, že

$$\arctan y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k}(\arctan y)\bigg|_{y=0} y^k = \arctan y|_{y=0} + \frac{1}{1+y^2}\bigg|_{y=0} y - \frac{2y}{(1+y^2)^2}\bigg|_{y=0} y^2 + \mathrm{o}\left(y^2\right) = y + \mathrm{o}\left(y^2\right),$$

výraz v čitateli má proto Taylorův rozvoj

$$\arctan(1-\cos x) = \arctan\left(\frac{x^2}{2!} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) = \frac{x^2}{2!} + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Složitý výraz ve jmenovateli proto stačí rozvést pouze do řádu $\mathrm{o}\left(x^2\right)$, což mimo jiné znamená, že členem $\sin^4 x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^4 = \mathrm{o}\left(x^2\right)$ se vůbec nemusíme zabývat. Zbývá nalézt rozvoj členu $e - e^{\sqrt[3]{1-x^2}}$. Počítejme

$$\begin{aligned} e - e^{\sqrt[3]{1-x^2}} &= e\left(1 - e^{\sqrt[3]{1-x^2}-1}\right) = e\left(1 - e^{\left(1-\frac{x^2}{3}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)-1}\right) = e\left(1 - e^{-\frac{x^2}{3}+\mathrm{o}\left(x^2\right)}\right) \\ &= e\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)\right) = \frac{e}{3}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right), \end{aligned}$$

kde jsme využili známé rovoje

$$(1+y)^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} y^k = 1 + \frac{y}{n} + \mathrm{o}(y),$$

$$e^y = \sum_{k=0} \frac{x^k}{k!} = 1 + y + \mathrm{o}(y).$$

celkem tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1-\cos x)}{\sin^4 x + e - e^{\sqrt[3]{1-x^2}}}. = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)}{\frac{e}{3}x^2 + o\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{e}{3} + \frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right)} = \frac{3}{2e}.$$

Závěrem drobná poznámka. Uvědomte si prosím, že rozvoj

$$e^y = \sum_{k=0} \frac{x^k}{k!} = 1 + y + o(y)$$

platí pro $y \to 0$. Nelze tedy kupříkladu psát (jak bylo často vidět ve zkouškové písemné práci)

$$e^{\sqrt[3]{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)^k}{k!},$$

a to proto, že $\sqrt[3]{1-x^2} \not\to 0$ pro $x \to 0$. Pokud chcete nalézt Taylorův rozvoj zmíněné funkce (tedy $e^{\sqrt[3]{1-x^2}}$), musíte buď použít obecný vzorec pro Taylorův rozvoj a vypočítat tedy všechny potřebné derivace a vyčíslit je v příslušných bodech, nebo můžete použít početní trik tak, jako ve výše uvedeném postupu, tedy

$$e^{\sqrt[3]{1-x^2}} = e^{\left(\sqrt[3]{1-x^2}-1+1\right)} = e \cdot e^{\left(\sqrt[3]{1-x^2}-1\right)},$$

kde je nyní $\left(\sqrt[3]{1-x^2} - 1\right) \to 0$ a lze proto použít známý vzorec pro rovoj exponenciály v nule.

[14] 2. Vyšetřete průběh následujících funkce (definiční obor, obor hodnot, prostá, sudá nebo lichá, spojitost, body nespojitosti, limity v bodech nespojitosti, diferencovatelnost, spojitost derivace, limity derivace v bodech nespojitosti derivace, monotonie, konvexní, konkávní, lokální a globální extrémy, inflexní body, asymptoty, graf).

$$f(x) = \ln x + \left|x^2 - 3x + 2\right|$$

Řešení:

Definiční oborem zkoumané funkce je zřejmě $\mathbb{R}^+$ (kvůli funkci $\ln x$). Funkce zjevně není ani sudá ani lichá neboť je definována pouze na kladné reálné poloose. Funkce není periodická. Jest

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

zkoumejme tedy funkci f na třech intervalech, jmenovitě

$$\ln x + \left|x^2 - 3x + 2\right| = \begin{cases} \ln x + x^2 - 3x + 2 & x \in (0,1), \\ \ln x - x^2 + 3x - 2 & x \in (1,2), \\ \ln x + x^2 - 3x + 2 & x \in (2,+\infty). \end{cases}$$

Hodnoty funkce v bodech $x = 1$ a $x = 2$ jsou $f(1) = 0$ a $f(2) = \ln 2 > 0$. Limity v krajních bodech definičního oboru jsou

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

V bodě $x = 0$ má tedy funkce vertikální asymptotu. Funkce je na svém definičním oboru spojitá (funkce je složením a součtem spojitých funkcí).

Spočtěme první derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln x + \left|x^2 - 3x + 2\right|\right) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln x + x^2 - 3x + 2\right) = \frac{1}{x} + 2x - 3 & x \in (0,1), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln x - x^2 + 3x - 2\right) = \frac{1}{x} - 2x + 3 & x \in (1,2), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln x + x^2 - 3x + 2\right) = \frac{1}{x} + 2x - 3 & x \in (2,+\infty). \end{cases}$$

Limity derivace v bodech $x = 1$ a $x = 2$ jsou

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = 2,$$
$$\lim_{x\to 2-} f'(x) = -\frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to 2+} f'(x) = \frac{3}{2},$$

derivace v těchto bodech tedy neexistuje.

Najděme body, kde $f'(x) = 0$, jest

$$\frac{1}{x} + 2x - 3 = 0, \text{ pro } x \in (0,1) \cup (2,+\infty)$$
$$\frac{1}{x} - 2x + 3 = 0, \text{ pro } x \in (1,2).$$

Řešením první rovnice je $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = 1$, řešením druhé rovnice je $x_1 = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$, vzhledem k omezením kladeným na x tedy máme pouze dva stacionární body, $x_a = \frac{1}{2} \in (0,1) \cup (2,+\infty)$ a $x_b = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \in (1,2)$. Funkce je tudíž rosoucí na intervalech $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$ a $(2,+\infty)$ a je klesající na intervalech $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ a $\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}, 2\right)$.

Spočtěme druhou derivaci

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\ln x + \left|x^2 - 3x + 2\right|\right) = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\ln x + x^2 - 3x + 2\right) = -\frac{1}{x^2} + 2 & x \in (0,1), \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\ln x - x^2 + 3x - 2\right) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0 & x \in (1,2), \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\ln x + x^2 - 3x + 2\right) = -\frac{1}{x^2} + 2 & x \in (2,+\infty). \end{cases}$$

Najděme body, kde $f''(x) = 0$. Stačí řešit rovnici

$$-\frac{1}{x^2} + 2 = 0,$$

pro zkoumané rozmezí x má uvedená rovnice jedinné řešení a sice $x_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Funkce je tudíž konkávní na intervalu $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a na intervalu $(1, 2)$ a je konvexní na intervalu $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ a na intervalu $(2, +\infty)$.

Vybaveni těmito informacemi můžeme nakreslit graf (viz obrázek 1). Z grafu vyčteme zbývající informace: funkce není prostá, obor hodnot je $\mathbb{R}$. Funkce má lokálním maximum v bodě $x_a = \frac{1}{2}$ a $x_b = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$, funkce má lokální minimum v bodě $x = 1$ a v bodě $x = 2$.

[3] 3. (a) Nechť platí, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, kde $x_0 \in \mathbb{R}^\star$ a $\forall x \in \mathcal{P}(x_0)$ platí, že $g(x) < -\beta$, kde $\beta > 0$. Co lze říci o limitě $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x)$? Své tvrzení dokažte.

[5] (b) Uvažujte funkci $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Nechť dále pro každé racionální číslo $y \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$ platí, že $f(y) = 0$. Ukažte, že pak musí být $f(z) = 0$ pro každé $z \in [a, b]$.

Řešení:

Ze zadání příkladu víme (obecná definice limity)

$$\begin{aligned} \forall L > 0,\ \exists \mathcal{P}_\delta(x_0), \forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) :&\ \ f(x) < -L, \\ \exists \beta > 0, \forall x \in \mathcal{P}_\mu(x_0) :&\ \ g(x) < -\beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Potom ale nutně

$$\forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \cap \mathcal{P}_\mu(x_0) : f(x)g(x) > L\beta.$$

Pro libovolné $M > 0$ lze tedy najít δ (plyne z (1), kde L volíme jako $\frac{M}{\beta}$) tak, aby platilo $f(x)g(x) > L\beta = \frac{M}{\beta}\beta = M$, což je vpodstatě definice limity $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.

Věnujme se nyní druhé části příkladu, proveďme důkaz sporem. Nechť $z^\star \in [a, b] \cap (\mathbb{Q} \cup [a, b])$ a chť je v tomto bodě $f(z^\star) \neq 0$. Ze spojitosti funkce f pak ovšem plyne, že musí existovat takové okolí $\mathcal{U}_\delta(z^\star)$ tak, že funkce f je zde nenulová, aneb $\forall x \in \mathcal{U}_\delta(z^\star) :\ f(x) > 0$. V tomto okolí ale zároveň vždy bude nějaké racionální číslo $y \in \mathcal{U}_\delta(z^\star) \cap \mathbb{Q}$ a musí tedy být $f(y) = 0$, což je spor.

[10] 4. Pro funkci $f \in \mathcal{C}([a,b])$ zformulujte a dokažte základní větu diferenciálního a integrálního počtu.

Dokažte, že je-li funkce f spojitá na $\mathbb{R}$, pak existuje primitivní funkce, to jest existuje funkce F taková, že $F' = f$. Návod: Uvědomte si, že $\mathbb{R} = \cup_{n=1}^{+\infty}[-n, n]$.

Řešení:

Základní věta diferenciálního a integrálního počtu pro $f \in \mathcal{C}([a,b])$ zní:

Buď $f \in \mathcal{C}([a,b])$ pak definujeme

$$F_a(x) = \int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y,$$

s konvencí $F_a(a) = 0$. Pak platí

$$\forall x_0 \in [a,b) : F_a'(x_0+) = f(x_0+),$$
$$\forall x_0 \in (a,b] : F_a'(x_0-) = f(x_0-),$$

neboli $F_a(x)$ je primitivní funkce k f na (a,b).

Větu dokážeme kupříkladu takto. (Zabývejme se například o derivaci zprava, $x_0 \in [a,b)$.)

$$\begin{aligned} F_a'(x_0+) &= \lim_{x \to x_0+} \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y - \int_a^{x_0} f(y)\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \lim_{x \to x_0+} \frac{1}{x - x_0}\int_x^{x_0} f(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{x \to x_0+} \frac{1}{x - x_0}\int_x^{x_0} \left(f(y) - f(x_0+)\right)\,\mathrm{d}y + f(x_0+) = f(x_0+) \end{aligned}$$

a to za předpokladu, že podaří ukázat $\lim_{x \to x_0+} \frac{1}{x - x_0}\int_x^{x_0} \left(f(y) - f(x_0+)\right)\ \mathrm{d}y \to 0$, k čemuž využijeme spojitosti funkce $f(x)$. Je-li totiž funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak lze pro libovolné $\varepsilon > 0$ najít takové x, aby $\max_{y \in [x_0, x]} |f(y) - f(x_0+)| < \varepsilon$, proto

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{1}{x - x_0}\int_x^{x_0} \left(f(y) - f(x_0+)\right)\ \mathrm{d}y \le \lim_{x \to x_0+} \frac{1}{x - x_0} \max_{y \in [x_0, x]} |f(y) - f(x_0+)| \int_x^{x_0}\ \mathrm{d}y = \max_{y \in [x_0, x]} |f(y) - f(x_0+)| \le \varepsilon.$$

Přikročme nyní k důkazu existence primitivní funkce na celém $\mathbb{R}$. Je-li $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, pak dle základní věty diferenciálního a integrálního počtu nutně existuje primitivní funkce na jakémkoliv intervalu $[-n, n]$, označme si ji F_n. Pak platí $\forall x \in (-n, n) : F_n'(x) = f(x)$. Definujme si nyní $G_n(x) = F_n(x) - F_n(0)$ a následně pak konečně primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$ jako $F(x) = G_n(x)$ pro $x \in [-n, n]$ z konstrukce pak plyne, že funkce $F(x)$ je skutečně primitivní fucnkí a že je určená jednoznačně.

[6] 5. Uvažujte následující matematickou hru. Zvolíme kladné reálné číslo x, a pak spočteme $\sqrt{x}$, tento proces opakujeme nekonečněkrát (v druhém kroku hry tedy kupříkladu dostaneme $\sqrt{\sqrt{x}}$). Jaké číslo (pokud vůbec nějaké) dostaneme na konci hry?

Řešení:

Úlohu lze vyřečeit kupříkladu takto. Po první aplikaci odmocniny na číslo x dostaneme $\sqrt{x}$, druhá aplikace odmocniny dává $\sqrt{\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}}$, n-tá aplikace odmocniny tedy vyústí v $x^{\frac{1}{2^n}}$. Nyní stačí provést limitu $\lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{2^0}} = 1$.

Případně lze použít následující postup. Úloha se zřejmě dá zapsat rekurzivně, v $n+1$-tém kroku hry dostaneme

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \tag{2}$$

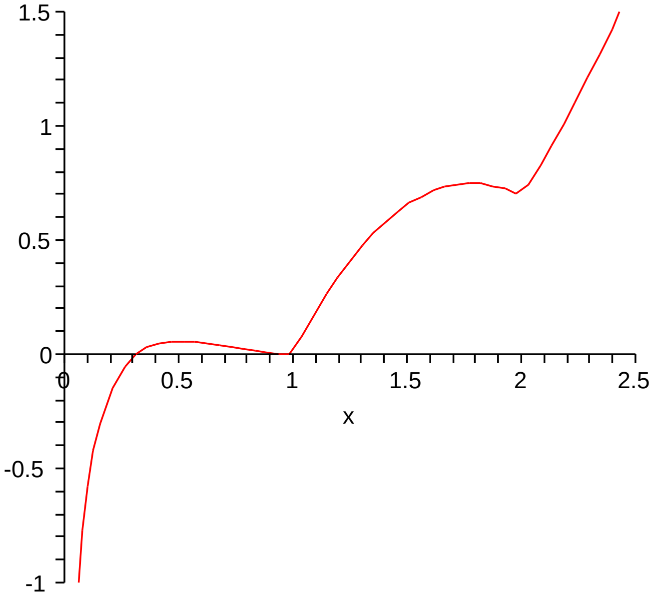
kde a_n je výsledek z předchozího, n-tého, kroku. Zkoumejme nyní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, zřejmě platí

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &< x,\ \ x > 1,\\ \sqrt{x} &= x,\ \ x = 1,\\ \sqrt{x} &> x,\ \ x < 1,\end{aligned}$$

vše je zřejmé z grafu funkce odmocnina, v případě potřeby byste jistě dokázali najít přesnější argument. Pro $a_0 = 1$ je tedy nutně $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ a dále pro $a_0 > 1$ platí $a_{n+1} < a_n$ a naopak $a_{n+1} > a_n$, posloupnost je navíc v obou příadech omezená. V obou případech tedy máme omezené monotónní posloupnosti, podle příslušné věty tedy tyto posloupnosti musí mít limitu, označmě si ji a_+ a a_-, limitním přechodem v rekurentním vztahu (2) ovšem dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n},\\ a_\pm &= \sqrt{a_\pm}.\end{aligned}$$

Pro limitní hodnotu tedy máme rovnici $a_\pm = \sqrt{a_\pm}$, jejímž řešením je $a_\pm = 0$ nebo $a_\pm = 1$, zjevně nemůže být $a_\pm = 0$, výsledkem hry je proto v každém případě $a = 1$.



Obrázek 1: Graf funkce $\ln x + \left|x^2 - 3x + 2\right|$.