1. Ukažte, že integrál

$$I(a) = \int_0^2 x^2 \cos ax \mathrm{d}x$$

je pro $a \in (-\infty, +\infty)$ spojitou funkcí parametru a.

2. Zjistěte, pro které hodnoty parametru a konverguje integrál

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x$$

a spočtěte jej.

3. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_\gamma x^2 \mathrm{d}l,$$

kde γ je křivka zadaná rovnicí $y = \ln x$ a $x \in (1, 2)$.

4. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_\gamma (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y,$$

kde γ je obvod trojúhelníka ABC, kde body A, B, C mají souřadnice $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [0, 1]$. Křivka je orientována v kladném směru.

5. Najděte plošný obsah plochy v $\mathbb{R}^3$ popsané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= h\varphi, \end{aligned}$$

kde $r \in [0, a]$ a $\rho \in [0, 2\pi]$ ($a, h \in \mathbb{R}^+$ jsou libovolné parametry).

6. Najděte plošný obsah plochy v $\mathbb{R}^3$, která je zadána rovnicí

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1,$$

kde $z \geq 0$.

7. Spočtěte

$$\int_S \mathbf{T} \mathrm{d}\mathbf{S},$$

kde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} y - z \\ z - x \\ x - y \end{bmatrix}$$

a S je povrch kužele o výšce h s vrcholovým úhlem $\frac{\pi}{2}$, tedy $S = \partial M$, kde množina M je dána předpisem $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, h]\right\}$.

8. Nalezněte formu $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ tak, aby platilo $\mathrm{d}\omega = (x^2 + y^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ a užijte ji pro výpočet integrálu

$$\int_\Omega (x^2 + y^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je zadána předpisem $\Omega = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| < 4\right\} \setminus \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.