Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ____________________

Skupina: ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem bodů**
Bodů	15	25	10	20	15	85
Získáno						

[15] 1. Buď $a \in \mathbb{R}^+$. Určete pro jaká $b \in \mathbb{R}$ konverguje (to jest existuje a je konečný) následující (Lebesgueův) integrál:

$$F(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} \mathrm{d}x.$$

Pro taková $b \in \mathbb{R}$, pro která integrál konverguje, vyšetřete diferencovatelnost funkce $F(b)$, napište vztah pro $\frac{\mathrm{d}F(b)}{\mathrm{d}b}$ a spočtěte hodnotu funkce $F(b)$.

Řešení:

Funkce $f(x,b) = e^{-ax^2+bx}$ je spojitá (vzhledem k proměnné x) a nezáporná na (měřitelné) množině $(-\infty, +\infty)$. Lebesgueův integrál $\int f(x,b)\mathrm{d}x$ tudíž exituje pro libovolné $b \in \mathbb{R}$, zbývá rozhodnout zda je konečný—problematickými body jsou v tomto případě body $\pm\infty$, limitní srovnávací kritérium ovšem dává

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-ax^2+bx}}{e^{\pm x}} = 0$$

a v $\pm\infty$ je tedy $f(x,b)$ bezpečně kontrolována lebesgueovsky integrovatelnou funkcí $e^{\pm x}$ (která má konečný Lebesgueův integrál). Integrál $\int f(x,b)\mathrm{d}x$ tudíž existuje a je konečný pro libovolné $b \in \mathbb{R}$.

Zkoumejme nyní derivaci funkce $F(b)$ v bodě $b = B$, k tomu použijeme větu o záměně derivace a integrálu, která říká:

Buď $f(x,b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí

- Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
- Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x,b)| \leq g(x)$.
- Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x,b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.

Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x,b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce

$$F(b) = \int_I f(x,b)\mathrm{d}x$$

je diferencovatelná na I a platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x,b)\mathrm{d}x.$$

V našem případě volme $I = (-\infty, +\infty)$, $J = (B-\epsilon, B+\epsilon)$. Diferencovatelnost funkce $f(x,b)$ podle proměnné b je zřejmá, měřitelnost podle proměnné x jsme diskutovali v úvodu, bod $b_0 \in J$, ve kterém má být funkce $f(x,b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I, nepochybně existuje, protože výše jsme dokonce zjistili, že $f(x,b)$ je lebesgueovsky integrovatelná pro libovolné b. Zbývá najít integrovatelnou majorantu pro derivaci, což je snadné neboť platí

$$\forall x \in I, \forall b \in (B-\epsilon, B+\epsilon): \left| x e^{-ax^2+bx} \right| \leq C(a) e^{-a\frac{x^2}{2}} e^{\max\{B-\epsilon, B+\epsilon\}|x|},$$

kde funkce na pravé straně je ovšem lebesgueovsky integrovatelná (to lze zjistit postupem použitým v úvodu). V odhadu využíváme nerovnosti

$$|xe^{-a\frac{x^2}{2}}| \leq \max_{x\in I} |xe^{-a\frac{x^2}{2}}| = \left. xe^{-a\frac{x^2}{2}} \right|_{x=\sqrt{\frac{1}{2a}}} \leq C(a).$$

Všechny předpoklady věty o záměně derivace a integrálu jsou tedy splněné a funkce $F(b)$ má tudíž derivaci v každém bodě $b \in J$ a následně tedy i v každém bodě $b \in \mathbb{R}$ (neboť bod B byl ve větě volen libovolně).

Derivace má hodnotu

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F(b)}{\mathrm{d}b} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} e^{-ax^2+bx}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ax^2+bx}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} (-2ax+b)e^{-ax^2+bx}\mathrm{d}x + \frac{b}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2a}\left[e^{-ax^2+bx}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{b}{2a}F(b) = \frac{b}{2a}F(b).
\end{aligned}$$

Získané rovnice

$$\frac{\mathrm{d}F(b)}{\mathrm{d}b} = \frac{b}{2a}F(b)$$

lze využít k výpočtu hodnoty $F(b)$, řešením rovnice dostaneme

$$F(b) = Ce^{\frac{b^2}{4a}},$$

kde C je (nezáporná) konstanta. Víme, že $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ a tedy $C = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, celkem

$$F(b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

[25] 2. Buď $M = [0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ krychle v $\mathbb{R}^3$ a buď $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ diferenciální 2-forma v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (e^z + x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Spočtěte integrály (hranice M je orientovaná ve směru vnější normály)

$$\int_{\partial M} \omega$$

a

$$\int_M \mathrm{d}\omega$$

a ukažte, že jsou si oba integrály rovny (každý integrál počítejte zvlášť podle definice, k výpočtu nepoužívejte Stokesovu větu).

Řešení:

Spočtěme nejdříve

$$\int_M \mathrm{d}\omega.$$

Vnější diferenciál formy ω je

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \; + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + e^z \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= (1 + 1 + e^z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &= (2 + e^z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\end{aligned}$$

integrál formy $\mathrm{d}\omega$ přes množinu M je pak

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{d}\omega = \int_M (2+e^z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \; = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (2+e^z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \; &= \int_{z=0}^1 (2+e^z)\mathrm{d}z \\ &= \left[2z + e^z\right]_0^1 = (2+e) - 1 = e + 1.\end{aligned}$$

K výpočtu integrálu

$$\int_{\partial M} \omega$$

budeme potřebovat parametrizace (vhodně orientované) stěn krychle $[0,1]^3$. Začněme s parametrizací přední a zadní stěny (viz obrázek 2(a)). Parametrizace přední stěny (značíme c_1) krychle je

$$\mathbf{\Phi}_{c_1}(\mathbf{s}) = \begin{cases} x = 1, \\ y = s, \\ z = t, \end{cases}$$

parametrizace zadní stěny (značíme c_2) je

$$\mathbf{\Phi}_{c_2}(\mathbf{s}) = \begin{cases} x = 0, \\ y = s, \\ z = t. \end{cases}$$

V obou případech je $s \in (0,1)$, $t \in (0,1)$. Zafixujme pořadí proměnných $[s,t]$, pak

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{c_{1,2}}}{\mathrm{d}s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{c_{1,2}}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vnější normála k přední stěně je

$$\mathbf{n}_{c_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vnější normála k zadní stěně je

$$\mathbf{n}_{c_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Orientaci určíme podle znaménka determinantu $\det \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{c_i}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{c_i}}{\mathrm{d}t}, \mathbf{n}_{c_i}\right]$. S uvedenými parametrizacemi je

$$\det_{c_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 > 0, \quad \det_{c_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0.$$

Plocha c_1 je tedy v dané parametrizaci orientována ve směru vnější normály ($+$ znaménko při integraci), plocha c_2 je v dané parametrizaci orientována proti směru vnější normály ($-$ znaménko při integraci—všechny části hranice musí mít orientaci podle vnější normály). Přenos diferenciální formy $\boldsymbol{\Phi}^\star(\omega)$ je na daných plochách roven

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}^\star_{c_1}(\omega) &= 1\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t + 0 + 0 = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t, \\ \boldsymbol{\Phi}^\star_{c_2}(\omega) &= 0\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Obdobně postupujeme pro ostatní stěny krychle. Pro pravou (značíme c_3) a levou (značíme c_4) stěnu máme parametrizace

$$\boldsymbol{\Phi}_{c_3}(\mathbf{s}) = \begin{cases} x = s, \\ y = 1, \\ z = t, \end{cases} \qquad \boldsymbol{\Phi}_{c_4}(\mathbf{s}) = \begin{cases} x = s, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$$

V obou případech je $s \in (0,1)$, $t \in (0,1)$. Zafixujme pořadí proměnných $[s,t]$, pak

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{c_{3,4}}}{\mathrm{d}s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{c_{3,4}}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vnější normála k pravé stěně je

$$\mathbf{n}_{c_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vnější normála k levé stěně je

$$\mathbf{n}_{c_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Orientaci určíme podle znaménka determinantu $\det \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{c_i}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{c_i}}{\mathrm{d}t}, \mathbf{n}_{c_i}\right]$. S uvedenými parametrizacemi je

$$\det_{c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0, \quad \det_{c_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 > 0.$$

Plocha c_4 je tedy v dané parametrizaci orientována ve směru vnější normály (+ znaménko při integraci), plocha c_3 je v dané parametrizaci orientována proti směru vnější normály (− znaménko při integraci—všechny části hranice musí mít orientaci podle vnější normály).

Přenos diferenciální formy $\mathbf{\Phi}^\star(\omega)$ je na daných plochách roven

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^\star_{c_3}(\omega) &= 0 + 1\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}s \ + 0 = -\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t,\\ \mathbf{\Phi}^\star_{c_4}(\omega) &= 0 + 0\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}s \ + 0 = 0.\end{aligned}$$

Konečně pro poslední dvojici stěn, dolní (značíme c_5) a horní (značíme c_6) stěnu máme parametrizace

$$\mathbf{\Phi}_{c_5}(\mathbf{s}) = \begin{cases} x = s, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} \qquad \mathbf{\Phi}_{c_6}(\mathbf{s}) = \begin{cases} x = s, \\ y = t, \\ z = 1. \end{cases}$$

V obou případech je $s \in (0,1)$, $t \in (0,1)$. Zafixujme pořadí proměnných $[s,t]$, pak

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{c_{4,5}}}{\mathrm{d}s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{c_{3,4}}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vnější normála k dolní stěně je

$$\mathbf{n}_{c_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

vnější normála k horní stěně je

$$\mathbf{n}_{c_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Orientaci určíme podle znaménka determinantu $\det \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{c_i}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{c_i}}{\mathrm{d}t}, \mathbf{n}_{c_i} \right]$. S uvedenými parametrizacemi je

$$\det_{c_5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 < 0, \quad \det_{c_6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0.$$

Plocha c_6 je tedy v dané parametrizaci orientována ve směru vnější normály (+ znaménko při integraci), plocha c_5 je v dané parametrizaci orientována proti směru vnější normály (− znaménko při integraci—všechny části hranice musí mít orientaci podle vnější normály).

Přenos diferenciální formy $\mathbf{\Phi}^\star(\omega)$ je na daných plochách roven

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^\star_{c_5}(\omega) &= 0 + 0 + (e^0 + s)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t = (1+s)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t,\\ \mathbf{\Phi}^\star_{c_6}(\omega) &= 0 + 0 + (e^1 + s)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t = (e+s)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Shromáždili jsme všechny potřebné informace k výpočtu integrálu, zbývá dosadit (s ohledem na orientaci)

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_{c_i=1}^{6} \int_{c_i} \omega = \int_{c_1} \omega - \int_{c_2} \omega - \int_{c_3} \omega + \int_{c_4} \omega - \int_{c_5} \omega + \int_{c_6} \omega$$
$$= \int_{c_1} \omega - \int_{c_3} \omega - \int_{c_5} \omega + \int_{c_6} \omega$$
$$= \int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{1} \mathbf{\Phi}^{\star}_{c_1}(\omega) - \int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{1} \mathbf{\Phi}^{\star}_{c_3}(\omega) - \int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{1} \mathbf{\Phi}^{\star}_{c_5}(\omega) + \int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{1} \mathbf{\Phi}^{\star}_{c_6}(\omega).$$

Dosadíme spočtené přenosy formy ω a dostaneme výsledek

$$\int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{1} \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t - \int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{1} (-1)\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t - \int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{1} (1+s)\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t + \int_{s=0}^{1}\int_{t=0}^{1} (e+s)\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t$$
$$= 1 + 1 - \left[s + \frac{s^2}{2}\right]_0^1 + \left[es + \frac{s^2}{2}\right]_0^1 = 1 + 1 - (1 + \frac{1}{2}) + (e + \frac{1}{2}) = e + 1,$$

což je kupodivu totéž jako $\int_M \mathrm{d}\omega$.

[10] 3. Buď $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ křivka v $\mathbb{R}^2$ zadaná implicitní rovnicí $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$, $x, y \geq 0$. (Povšimněte si prosím toho, že křivka leží v prvním kvadrantu.) Najděte délku křivky γ, to jest spočtěte integrál

$$\int_\gamma \mathrm{d}l.$$

Křivku orientujte tak, aby byl bod $[x, y] = [0, 2^{\frac{3}{2}}]$ jejím počátečním bodem a bod $[x, y] = [2^{\frac{3}{2}}, 0]$ jejím koncovým bodem. S takto zadanou orientací spočtěte

$$\int_\gamma \mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{l},$$

kde $\mathbf{T}$ je vektorové pole

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Křivku $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ můžeme parametrizovat například takto

$$\mathbf{\Phi}(\varphi) = \begin{cases} x = 2^{\frac{3}{2}} \cos^3 \varphi, \\ y = 2^{\frac{3}{2}} \sin^3 \varphi, \end{cases}$$

kde $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. V této parametrizaci je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}}{\mathrm{d}\varphi} = 2^{\frac{3}{2}} 3 \begin{bmatrix} -\cos^2 \varphi \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{bmatrix} = 2^{\frac{3}{2}} 3 \cos \varphi \sin \varphi \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

a následně

$$\mathrm{d}l = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}}{\mathrm{d}\varphi} \right\| = 2^{\frac{3}{2}} 3 \sqrt{\cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi} = 2^{\frac{3}{2}} 3 \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right)}$$
$$= 2^{\frac{3}{2}} 3 \cos \varphi \sin \varphi.$$

Odtud pak

$$\int_\gamma \mathrm{d}l = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} 2^{\frac{3}{2}} 3 \cos \varphi \sin \varphi \mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} 2^{\frac{3}{2}} 3 \frac{\sin 2\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi = 2^{\frac{3}{2}} 3 \left[-\frac{\cos 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Orientace křivky v dané parametrizaci je opačná než je požadováno (neboť $\mathbf{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 2^{\frac{3}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$, což je ovšem koncový bod křivky), při výpočtu integrálu $\int_\gamma \mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{l}$ s použitím uvedené parametrizace musíme tudíž změnit znaménko, je tedy

$$\mathbf{T} \bullet \mathrm{d}\mathbf{l} = \mathbf{T} \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}}{\mathrm{d}\varphi} = 2^{\frac{3}{2}} 3 \cos \varphi \sin \varphi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = 2^{\frac{3}{2}} 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

a následně

$$\int_\gamma \mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} 2^{\frac{3}{2}} 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \mathrm{d}\varphi = -2^{\frac{3}{2}} 3 \left[\frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2^{\frac{3}{2}}.$$

[20] 4. Buď $M = \left\{ \mathbf{x} = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 | z = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}, z \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \right\} \subset \mathbb{R}^3$ plocha v $\mathbb{R}^3$. Najděte parametrizaci této plochy a určete její obsah, to jest spočtěte

$$\int_M \mathrm{d}S.$$

Plochu orientujte tak, aby průmět její normály do roviny $z = 0$ mířil do počátku souřadné soustavy. S takto zavedenou orientací spočtěte

$$\int_M \mathbf{T} \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_M \mathbf{T} \bullet \mathbf{n} \mathrm{d}S,$$

kde vektorové pole $\mathbf{T}$ je dáno předpisem

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Uvedenou plochu lze parametrizovat například následující způsobem

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{s}) = \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = \frac{r^3}{3}, \end{cases}$$

kde $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Zafixujme nyní pořadí proměnných $[r, \varphi]$. Tečné vektory v jednotlivých směrech jsou

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ r^2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

vektorový součin těchto vektorů je

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \times \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = r \begin{bmatrix} -r^2\cos\varphi \\ -r^2\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix},$$

parametrizace je tedy zjevně taková, že průmět (do roviny $z = 0$) normálového vektoru k ploše míří do středu souřadného systému—ve výpočtu plošného integrálu $\int_M \mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_M \mathbf{T} \bullet \mathbf{n}\mathrm{d}S$ nebude potřeba změnit znaménko.

Element plochy $\mathrm{d}S$ je roven velikosti vektoru $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \times \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi}$, tudíž

$$\mathrm{d}S = \left\| \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \times \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \right\| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = r\sqrt{1 + r^4}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Alternativně lze pro výpočet plošného elementu použít Grammův determinant

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\det g}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi,$$

kde

$$\det g = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} r^4+1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix},$$

tudíž kupodivu opět

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\det g}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = r\sqrt{1+r^4}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Spočtěme tedy

$$\int_M \mathrm{d}S = \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r\sqrt{1+r^4}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi. = 2\pi\int_{r=0}^{1} r\sqrt{1+r^4}\mathrm{d}r.$$

Integrál přes proměnnou r spočteme takto

$$\begin{aligned}
\int r\sqrt{1+r^4}\mathrm{d}r &= \left|\begin{matrix} \rho = r^2 \\ \mathrm{d}\rho = 2r\mathrm{d}r \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho = \left|\begin{matrix} \rho = \sinh x \\ \mathrm{d}\rho = \cosh x \mathrm{d}x \end{matrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\int \cosh^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4}\left(1+\cosh 2x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\left(x + \frac{\sinh 2x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsinh}\rho + \frac{\sinh\left(2\operatorname{arcsinh}\rho\right)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsinh}\rho + \sinh\left(\operatorname{arcsinh}\rho\right)\cosh\left(\operatorname{arcsinh}\rho\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsinh} r^2 + r^2\sqrt{1+\left(r^2\right)^2}\right),
\end{aligned}$$

celkem tedy

$$2\pi\int_{r=0}^{1} r\sqrt{1+r^4}\mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsinh} r^2 + r^2\sqrt{1+\left(r^2\right)^2}\right)\right]_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{arcsinh} 1 + \sqrt{2}\right).$$

Obsah plochy M je tudíž

$$\int_M \mathrm{d}S = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{arcsinh} 1 + \sqrt{2}\right).$$

Integrál $\int_{r=0}^{1} r\sqrt{1+r^4}\mathrm{d}r$ lze případně počítat i takto

$$\begin{aligned}
\int r\sqrt{1+r^4}\mathrm{d}r &= \left|\begin{matrix} \rho = r^2 \\ \mathrm{d}\rho = 2r\mathrm{d}r \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho \\
&= \left|\begin{matrix} u' = 1 & u = \rho \\ v = \sqrt{1+\rho^2} & v' = \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left(\rho\sqrt{1+\rho^2} - \int \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\rho\sqrt{1+\rho^2} - \int \sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho + \int \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho\right),
\end{aligned}$$

pravá strana nyní opět obsahuje hledaný integrál, a proto lze setavit rovnici

$$\int \sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\left(\rho\sqrt{1+\rho^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\mathrm{d}\rho\right)$$

odkud

$$\frac{1}{2}\int\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho = \frac{1}{4}\left(\rho\sqrt{1+\rho^2}+\operatorname{arcsinh}\rho\right) = \frac{1}{4}\left(r^2\sqrt{1+r^4}+\operatorname{arcsinh} r^2\right),$$

což je kupodivu shodné s předchozím výsledkem.

Spočtěme nyní $\int_M \mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_M \mathbf{T}\bullet\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_M \mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_M \mathbf{T}\bullet\mathbf{n}\mathrm{d}S$. Již víme, že

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\times\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = r\begin{bmatrix}-r^2\cos\varphi\\-r^2\sin\varphi\\1\end{bmatrix},$$

a proto

$$\mathbf{T}\bullet\mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{bmatrix}0\\0\\r^2\end{bmatrix}\bullet r\begin{bmatrix}-r^2\cos\varphi\\-r^2\sin\varphi\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\r^3\end{bmatrix}.$$

Je tedy (znaménko neměníme, orientace plochy je správná)

$$\int_M \mathbf{T}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r^3\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

[15] 5. Odvoďte vzorec pro výpočet povrchu válce v $\mathbb{R}^4$, to jest spočtěte

$$\int_M \mathrm{d}S,$$

kde $M = \partial\Omega$, $\Omega = \left\{\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2, A \leq x_4 \leq B\right\}$. Najděte parametrizaci množiny M (jakožto regulární plochy), nalezněte vztah pro velikost elementu plochy $\mathrm{d}S$.

Řešení:

Chceme-li parametrizovat povrch válce, musíme najít parametrizaci pro podstavy a pro plášť. Parametrizace válce (jakožto tělesa) je kupříkladu

$$\mathbf{\Phi}_{\text{válec}}(\mathbf{s}) = \begin{cases} x_1 = r \sin\theta \cos\varphi, \\ x_2 = r \sin\theta \sin\varphi, \\ x_3 = r \cos\theta, \\ x_4 = s, \end{cases}$$

kde $r \in [0, R]$, $s \in [A, B]$, $\theta \in [0, \pi]$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$. Odtud snadno získáme parametrizaci pláště (stačí zafixovat $r = R$)

$$\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}(\mathbf{s}) = \begin{cases} x_1 = R \sin\theta \cos\varphi, \\ x_2 = R \sin\theta \sin\varphi, \\ x_3 = R \cos\theta, \\ x_4 = s, \end{cases}$$

a ostatní proměnné nechat probíhat původní intervaly. Parametrizace podstav je taktéž jednoduchá, tentokrát stačí zafixovat proměnnou $s = A$ (spodní podstava) popřípadě $s = B$ (horní podstava), pro dolní podstavu tedy máme

$$\mathbf{\Phi}_{\text{podstava}}(\mathbf{s}) = \begin{cases} x_1 = r \sin\theta \cos\varphi, \\ x_2 = r \sin\theta \sin\varphi, \\ x_3 = r \cos\theta, \\ x_4 = A. \end{cases}$$

Je zřejmé, že pro výpočet plochy podstavy není důležité, jestli je $s = A$ nebo $s = B$, obsah obou podstav je stejný.

Spočtěme velikost plošného elementu $\mathrm{d}S$ pro plášť válce, k tomu použijeme Grammův determinant (v $\mathbb{R}^4$ nelze operovat s vektorovým součinem $\times$). Platí

$$\mathrm{d}S \;= \sqrt{\det g} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi,$$

kde

$$\det g = \det \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}s} \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}s} \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}s} \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\theta} \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\theta} \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\theta} \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\mathbf{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\varphi} \end{bmatrix}.$$

Spočteme jednotlivé tečné vektory

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\theta} = \begin{bmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ -R\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{plášť}}}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} -R\sin\theta\sin\phi \\ R\sin\theta\cos\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dosadíme do Grammova determinantu a výsledkem je

$$\det g = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\sin^2\theta \end{bmatrix},$$

tudíž

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\det g}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

a konečně

$$\int_{\text{plášť}} \mathrm{d}S = \int_{s=A}^{B}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2\sin\theta\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2(B-A)\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi R^2(B-A).$$

Zbývá obdobným způsobem spočíst obsah podstavy, tečné vektory jsou

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}r} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi, \\ \sin\theta\sin\varphi, \\ \cos\theta, \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\theta} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Element plochy je roven

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \sqrt{\det g}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \sqrt{\det \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\theta} \bullet \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\theta} \bullet \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\theta} \bullet \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\text{podstava}}}{\mathrm{d}\varphi} \end{bmatrix}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \sqrt{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

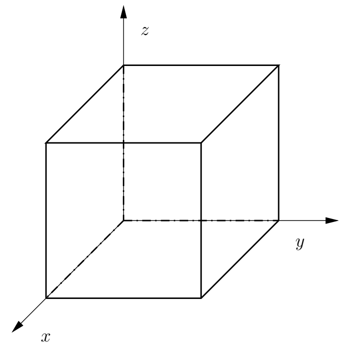
Zbývá vše zintegrovat, je

$$\int_{\text{podstava}} \mathrm{d}S = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

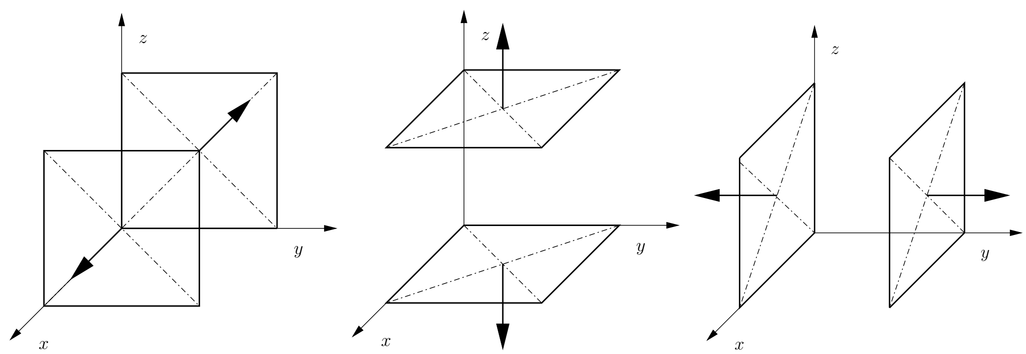
Celkem tedy pro povrch válce máme

$$\int_{\text{povrch válce}} \mathrm{d}S = \int_{\text{plášť}} \mathrm{d}S + 2\int_{\text{podstava}} \mathrm{d}S = 4\pi R^2(B-A) + \frac{8}{3}\pi R^3.$$

Vše lze samozřejmě odvodit i z geometrického názoru, protože povrch válce spočteme jednoduše tak, že sečteme velikost podstav (což jsou ovšem koule o poloměru R v $\mathbb{R}^3$ a mají tedy obsah/objem $\frac{4}{3}\pi R^3$) a velikost pláště—velikost pláště je ovšem rovná jeho výšce $B - A$ násobené velikostí obvodu pláště (což jsou ovšem sféry o poloměru R v $\mathbb{R}^3$ a mají tedy obvod/obsah $4\pi R^2$). Celkem $S = 2\frac{4}{3}\pi R^3 + (B - A)4\pi R^2 = 4(B - A)\pi R^2 + \frac{8}{3}\pi R^3$, což se kupodivu rovná výsledku výše uvedeného výpočtu.



Obrázek 1: Krychle v $\mathbb{R}^3$



(a) Přední a zadní stěna (b) Horní a dolní stěna (c) Pravá a levá stěna

Obrázek 2: Integrace přes hranici krychle