

Plošný integrál 2. druhu

1. Spočtěte $\int_S (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$, kde S je "vnější strana" kužele $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$.
2. Spočtěte $\int_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, kde S je "vnější strana" sféry $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
3. Spočtěte $\int_S (z - R)^2dxdy$, kde S je část kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $R \leq z \leq 2R$, orientovaná normálou ven.
4. Spočtěte $\int_S zdydz + xdzdx + ydxdy$, kde S je část plochy $x - y + z = 1$, $x, z \geq 0$, $y \leq 0$, orientované tak, že s vektorem ve směru kladné osy y svírá ostrý úhel.
5. Spočtěte $\int_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, kde S je část paraboloidu $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, $x \leq 0$, $y, z \geq 0$, orientovaná tak, že pro normálový vektor \mathbf{n} platí $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$, \mathbf{k} je vektor ve směru kladné osy y .
6. Spočtěte $\int_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$, kde S je elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, orientovaný normálou ven.

Stokesova a Gauß–Ostrogradského věta

7. Spočtěte křivkový integrál $\int_c ydx + zdy + xdz$, kde c je kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$, orientovaná kladně vzhledem k vektoru $(1, 1, 1)$.
8. Spočtěte křivkový integrál $\int_c (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, kde c je průnik krychle $[0, a]^3$ s rovinou $x + y + z = \frac{3}{2}a$, orientovaný kladně vzhledem k vektoru $(1, 1, 1)$.
9. Spočtěte křivkový integrál $\int_c y^2z^2dx + z^2x^2dy + x^2y^2dz$, kde c je elipsa $a(\sin^2 t, 2 \sin t \cos t, \cos^2 t)$, $t \in [0, 2\pi]$, orientovaná ve směru rostoucího parametru t .
10. Pomocí Stokesovy věty dokažte, že $\int_c yzdx + xzdy + xydz = 0$ pro libovolnou uzavřenou po částech hladkou křivku.

11. Spočtěte křivkový integrál $\int_c (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$, kde c je oblouk šroubovice \widehat{AB} $(a \cos t, a \sin t, \frac{h}{2\pi}t)$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (a, 0, h)$ tak, že křivku doplníte úsečkou BA na uzavřenou křivku a použijete Stokesovu větu.
12. Spočtěte $\int_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, kde S je vnějšek sféry $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
13. Spočtěte $\int_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$, kde S je část kuželové plochy $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$, a $\cos \alpha \dots$ jsou směrové kosiny normály k této ploše.
14. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = -u + a \cos v$, $u \geq 0$ a rovinami $x = 0$ a $z = 0$.
15. Dokažte Archimédův zákon.
16. Najděte objem sudu, ohraničeného plochami $z = \pm c$, $x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v$, $y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v$, $z = c \sin u$.
17. Nechť f a g jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce na oblasti Ω , která je ohraničená jednoduchou uzavřenou plochou S orientovanou normálou \mathbf{n} ven. Ukažte, že platí

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_{\Omega} \Delta f dxdydz$$

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_{\Omega} f \Delta g dxdydz + \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dxdydz$$

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_S g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS, \text{ je-li } \Delta f = \Delta g = 0$$