Příklady na 12., 13. a 14. týden

Fourierovy řady

Trigonometrické řady

1. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkci $f(x) = x^4$. Vyšetřete konvergenci této řady a řady derivací.

2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in L^1(-\pi, \pi)$ se anulují, jestliže platí $f(-x) = f(x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$?

3. Jak prodloužíte funkci $f \in L^1(0, \pi/2)$ na interval $(-\pi, \pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$?

4. Následující funkce rozložte ve Fourierovu řadu
   a) $\sin^4 x$ na $(0, \pi)$ b) $f(x) = ax$ na $(-\pi, 0)$, $f(x) = bx$ na $(0, \pi)$
   c) $|\sin x|$ na intervalu délky periody d) $\max(0, x)$ na $(-\pi, \pi)$
   e) e^{ax} na $(-1, 1)$ f) $\ln|\sin \frac{x}{2}|$ na intervalu periody

5. Rozložte do sinové a kosinové řady na $(0, \pi)$ funkci x^2.

Sčítání trigonometrických řad

6. Sečtěte následující řady v uvedených intervalech
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ $(0, 2\pi)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ $[0, 2\pi]$
   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ $(-\pi, \pi)$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ $[-\pi, \pi]$

7. Spočtěte
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Aplikace na řešení některých PDR

Pomocí trigonometrických řad řešte následující úlohy

8.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T)\times(0,l)$$
$$u(0,x) = x(l-x) \quad \text{na } [0,l]$$
$$u_t(0,x) = 0 \quad \text{na } [0,l]$$
$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).$$

9.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T)\times(0,l)$$
$$u(0,x) = 0 \quad \text{na } [0,l]$$
$$u_t(0,x) = \cosh x \quad \text{na } [0,l]$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).$$

10.
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T)\times(0,l)$$
$$u(0,x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{na } [0,l]$$
$$u(t,0) = u_x(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).$$

11.
$$\Delta u = 0 \text{ na } \{(x,y)\in R^2; 1 < x^2+y^2 < 4\}$$
$$u(x,y) = f_1(\varphi) \quad \text{na } x^2+y^2 = 1$$
$$u(x,y) = f_2(\varphi) \quad \text{na } x^2+y^2 = 4$$

kde f_1 a f_2 jsou 2π periodické spojité funkce, φ označuje úhlovou proměnnou v polárních souřadnicích.