

Integrály závislé na parametru

1. Ukažte, že následující integrály jsou spojitými funkcemi proměnné na dané množině

a) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi-x)^a} dx, a < 2$

b) $\int_0^2 x^2 \cos ax, -\infty < a < \infty$

c) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^a} dx, 1 < a < \infty$

Zjistěte, pro které hodnoty parametru integrál konverguje a spočtěte jej

2. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} dx$

3. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$

4. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$

5. $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

6. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} dx$

7. $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bxdx$

8. $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cosh bxdx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \sin^2 x)}{\sin^2 x} dx$

10. $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$

11. $\int_0^\infty \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^3 dx$
12. $\int_0^\pi \ln(a \pm b \cos x) dx$
13. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx dx$
14. $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} dx$
15. $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sinh x}{x} dx$
16. $\int_0^1 x^{-\alpha} \ln^n x dx$, n přirozené nebo 0
17. $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x) dx$
18. $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx$
19. $\int_{x>0, y>0} e^{-(x+y+\frac{a^3}{xy})} x^{-1/3} y^{-2/3} dx dy$
20. Vyšetřete průběh funkce na jejím definičním oboru

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$$