Příklady na 8.a 9. týden

Funkce komplexní proměnné V

Laurentovy řady

Rozviňte následující funkce v Laurentovy řady v redukovaném okolí daného bodu, nebo na dané množině.

1. $f(z) = \frac{1}{z-2}$, $z_0 = 0$; $z_0 = \infty$
2. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0 = 2$; $1 < |z| < 2$
3. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0 = i$; $z_0 = \infty$
4. $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$
5. $f(z) = \mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}}$, $0 < |z| < \infty$
6. $f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}$, $0 < |z| < \infty$
7. $f(z) = \mathrm{Ln}\frac{z-a}{z-b}$, $z_0 = \infty$

   Zjistěte, zda je možno rozvinout následující funkce do Laurentovy řady v redukovaném okolí daných bodů. Pokud je funkce mnohoznačná, vyšetřete všechny jednoznačné větve.

8. $f(z) = \cos \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$
9. $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, $z_0 = 0$
10. $f(z) = \frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$
11. $f(z) = \sqrt{z}$, $z_0 = 0$
12. $f(z) = \sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z_0 = 1$
13. $f(z) = \sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z_0 = 0$

Reziduová věta I

Věta: Nechť Γ je Jordanova křivka, probíhaná v kladném smyslu vzhledem k svému vnitřku. Nechť $a_1, a_2, \dots a_k$ jsou body z jejího vnitřku. Je-li f holomorfní na $\mathrm{Int}\,\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots a_k\}$ a spojitá na $\overline{\mathrm{Int}\,\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots a_k\}$, pak

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_j} f.$$

Věta: Je-li z_0 odstranitelnou singularitou f, pak $\mathrm{Res}_{z_0} f = 0$.
Je-li z_0 pólem f, jehož násobnost je menší nebo $k \in N$, pak

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big(\frac{1}{(k-1)!} (z - z_0)^k f(z) \Big).$$

Speciálně, je-li z_0 pólem f, jehož násobnost je jedna a g je v z_0 holomorní, pak

$$\mathrm{Res}_{z_0} \Big(fg \Big) = g(z_0) \mathrm{Res}_{z_0} f.$$

Je-li z_0 kořenem f, jehož násobnost je jedna, a g je v z_0 holomorní a nenulové, pak

$$\mathrm{Res}_{z_0} (\frac{g}{f}) = \frac{g(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Použitím reziduové věty a pravidel pro počítání s rezidui spočtěte následující integrály: (křivkové integrály se předpokládájí, že se probíhají v kladném smyslu)

14. $\displaystyle\int_{x^2+y^2=2x} \frac{dz}{z^4+1}$

15. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4+1}$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2}$

17. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in N$

18. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$, $a, b \in R$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$, $a > 0, b > 0,\ n \in N$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2-2x+10}$

22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2-2x+10}$

23. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax dx}{x^2+b^2}$

24. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4 - 5x^2 + 4}$

25. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2 + a^2)^2}$, $a > 0$

26. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$

27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x - t)}$, $a, t \in R$

28. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6}$

29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx dx}{1 + x^3}$, $t \in R$