

## Funkce komplexní proměnné II

### Komplexní logaritmus, obecná mocnina

- Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:  
 a)  $\text{Ln}(-1)$                       b)  $\text{Ln } i$                       c)  $\text{Ln}(-2 + 3i)$ .
- Najděte všechny hodnoty následujících funkcí:  
 a)  $1^{\sqrt{2}}$                       b)  $2^i$                       c)  $(3 + 4i)^{1+i}$ .

### Křivkový integrál

Spočtěte následující křivkové integrály:

- $\int_{\varphi} y dz$ ,  $\varphi$  je polokružnice  $|z| = 1$ , z bodu  $(1,0)$  do  $(-1,0)$  přes horní polokružnici
- $\int_{\varphi} (z - a)^n dz$ ,  $\varphi$  je kladně orientovaná kružnice  $|z| = R$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
- $\int_{\varphi} |z| dz$ ,  $\varphi$  je průvodič bodu  $2 - i$
- $\int_{\varphi} \frac{z}{\bar{z}} dz$ ,  $\varphi$  je kladně orientovaný obvod horního mezikruží se středem v počátku a poloměry 1 a 2
- Jakých hodnot může nabývat  $\int_{\varphi} \frac{dz}{z^2 + 9}$ , je-li  $\varphi$  uzavřená křivka, která neprochází body  $\pm 3i$ .
- Vypočtěte  $\int_{\varphi} \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$ , je-li  $\varphi$  kružnice o poloměru  $\frac{1}{2}$  a středu  
 a) 1                                      b) 0                                      c) -1
- Vypočtěte  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{e^z dz}{z(z-1)^3}$ , je-li  $\varphi$  kladně orientovaná kružnice o poloměru  $\frac{3}{2}$  a středu  
 a) -1                                      b) 2                                      c)  $\frac{1}{2}$
- Vypočtěte  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{e^z dz}{z^2 + a^2}$ , je-li  $\varphi : 2ae^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $a > 0$

Počáteční hodnota  $\arg f(z)$  resp.  $\text{Im } f(z)$  je pro  $z = 2$  rovna 0. Bod  $z$  proběhne kružnicí se středem v počátku a poloměru 2 v kladném směru,  $\arg f(z)$  resp.  $\text{Im } f(z)$  závisí spojitě na  $z$ . S jakou hodnotou se vrátí  $\arg f(z)$  resp.  $\text{Im } f(z)$  zpět do bodu  $z = 2$ ?

$$11. f(z) = \sqrt[3]{z-1}$$

$$12. f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$$

$$13. f(z) = 2 \ln z$$

$$14. f(z) = \ln z + \ln(z+1)$$

Spočítejte následující křivkové integrály:

$$15. \int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \varphi \text{ je polokružnice } |z| = 1, \text{ z bodu } (1,0) \text{ do } (-1,0) \text{ přes horní polorovinu, } \sqrt{1} = 1$$

$$16. \int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \varphi \text{ je polokružnice } |z| = 1, \text{ z bodu } (1,0) \text{ do } (-1,0) \text{ přes horní polorovinu, } \sqrt{1} = -1$$

$$17. \int_{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \varphi \text{ je polokružnice } |z| = 1, \text{ z bodu } (1,0) \text{ do } (-1,0) \text{ přes dolní polorovinu, } \sqrt{1} = 1$$

$$18. \int_{\varphi} \ln z dz, \varphi \text{ je kružnice } |z| = 1, \ln 1 = 0$$

$$19. \int_{\varphi} \ln z dz, \varphi \text{ je kružnice } |z| = 1, \ln i = \frac{\pi i}{2}$$

$$20. \int_{\varphi} \ln z dz, \varphi \text{ je kružnice } |z| = R, \ln R = \text{Ln } R + 2\pi i$$