1 Predikátová logika

1.1 Definice kvantifikátorů

Značení 1.1 (univerzální kvantifikátor) *Univerzální kvantifikace formalizuje obraty běžného jazyka „pro každé … “ (popřípadě „pro všechna … “, nebo „pro libovolné … “, atd.). Symbolický zápis těchto obratů je pak ($\varphi(x)$ je nějaká formule)*

$$\forall x : \varphi(x),$$

občas se používá i zápis $\bigwedge x : \varphi(x)$.

Značení 1.2 (existenční kvantifikátor) *Existenční kvantifikace formalizuje obraty běžného jazyka „existuje … “ (popřípadě „existuje aspoň jeden … “ atd.). Symbolický zápis těchto obratů je pak ($\varphi(x)$ je nějaká formule)*

$$\exists x : \varphi(x),$$

občas se používá i zápis $\bigvee x : \varphi(x)$.

Poznámka 1.3 *Značení $\forall$ pochází z německého* allgemein *(obrácené písmeno A) a značení $\exists$ z německého* existiert *(obrácené písmeno E). Kvantifikátory zavedl v roce 1879 v díle* Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens *německý matematik Gottlob Frege.*

Poznámka 1.4 (vzájemná definovatelnost kvantifikátorů) *V klasické[1] predikátové logice se obvykle definuje pouze jeden kvantifikátor a druhý se chápe jako zkratka tj. zvolíme-li za základní univerzální kvantifikátor $\forall$ je pak $\exists$ zkratkou ve smyslu*

$$\exists x : \varphi(x) =_{\mathrm{def}} \neg\left(\forall x : \neg\varphi(x)\right)$$

Poznámka 1.5 (kvantifikátory na konečných množinách) *Buď $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ nějaká konečná množina. Pak lze kvantifikátory chápat jako zkratky ve smyslu*

$$\forall x \in A : \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \wedge \cdots \wedge \varphi(a_n),$$

resp.

$$\exists x \in A : \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \cdots \vee \varphi(a_n).$$

Univerzální kvantifikátor je tedy cosi jako „obrovská“ konjunkce a existenční kvantifikátor je cosi jako „obrovská“ disjunkce. Odtud pak pochází občas užívané alternativní značení $\bigwedge x : \varphi(x)$ pro univerzální kvantifikátor a $\bigvee x : \varphi(x)$ pro existenční kvantifikátor.

Na konečných množinách lze také velmi snadno osvětlit vztah mezi oběma kvantifikátory ve smyslu poznámky 1.4. Máme totiž

$$\neg\left(\forall x \in A : \neg\varphi(x)\right) \Leftrightarrow \neg\left(\neg\varphi(a_1) \wedge \neg\varphi(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg\varphi(a_n)\right)$$

[1] V jiných logických systémech, např. v intuicionistické logice vzájemná definovatelnost kvantifikátorů neplatí a je třeba zavést oba kvantifikátory.

a podle pravidla $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$ *a dále* $\neg\neg a \Leftrightarrow a$ *pak dostaneme*

$$\neg\left(\neg\varphi(a_1) \wedge \neg\varphi(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg\varphi(a_n)\right) \Leftrightarrow \varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \cdots \vee \varphi(a_n),$$

což je podle definice přesně $\exists x \in A : \varphi(x)$.

1.2 Vlastnosti kvantifikátorů

Poznámka 1.6 *Níže uvedené věty se snadno ozřejmí pokud vezmeme v úvahu poznámky 1.4 a 1.5.*

Věta 1.7 (negace)

$$\neg\left(\forall x : \varphi(x)\right) \Leftrightarrow \exists x : \neg\varphi(x)$$

Příklad 1.8 *Najděte negaci věty „Všichni matematici umí počítat". Větu „Všichni matematici umí počítat" formalizujeme jako*

$$\forall x \in L : M(x) \Rightarrow P(x),$$

kde L *značí množinu všech lidí,* $M(x)$ *je predikát „*x *je matematik" a* $P(x)$ *je predikát „*x *umí počítat". Negace této věty je pak*

$$\neg(\forall x \in L : M(x) \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in L : \neg\left(M(x) \Rightarrow P(x)\right).$$

Implikaci znegujeme podle obvyklého pravidla výrokové logiky a výsledkem je

$$\exists x \in L : M(x) \wedge \neg P(x),$$

což čteme jako „Existuje matematik který neumí počítat".

Věta 1.9 (distributivnost kvantifikace)

$$(\forall x : (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow ((\forall x : \varphi(x)) \Rightarrow (\forall x : \psi(x)))$$

$$(\forall x : (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow ((\exists x : \varphi(x)) \Rightarrow (\exists x : \psi(x)))$$

Věta 1.10 (záměna pořadí kvantifikace a konjunkce)

$$(\forall x : \varphi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow ((\forall x : \varphi(x)) \wedge (\forall x : \psi(x)))$$

$$(\exists x : \varphi(x) \wedge \psi(x)) \Rightarrow ((\exists x : \varphi(x)) \wedge (\exists x : \psi(x)))$$

Příklad 1.11 *Poslední tvrzení předchozí věty nelze obrátit tj. obecně*

$$((\exists x : \varphi(x)) \wedge (\exists x : \psi(x))) \not\Rightarrow \left(\exists x : \varphi(x) \wedge \psi(x)\right),$$

o čemž se můžeme přesvědčit na jednoduchém protipříkladu. Uvažujme množinu všech lidí a nechť formule $\varphi(x)$ *říká „*x *má narozeníny v září" a* $\psi(x)$ *znamená „*x *má narozeniny v lednu". Z věty „Někdo má narozeniny v září a současně má někdo narozeniny v lednu" ovšem zdaleka neplyne, že „Někdo má narozeniny zároveň v září a v lednu".*

Věta 1.12 (záměna pořadí kvantifikace a disjunkce)

$$((\forall x : \varphi(x)) \vee (\forall x : \psi(x))) \Rightarrow (\forall x : \varphi(x) \vee \psi(x))$$

$$((\exists x : \varphi(x)) \vee (\exists x : \psi(x))) \Leftrightarrow (\exists x : \varphi(x) \vee \psi(x))$$

Poznámka 1.13 *První tvrzení předchozí věty nelze obrátit tj. obecně*

$$(\forall x : \varphi(x) \vee \psi(x)) \not\Rightarrow ((\forall x : \varphi(x)) \vee (\forall x : \psi(x)))\,,$$

o čemž se lze přesvědčit na jednoduchém protipříkladu. Uvažujme množinu přirozených čísel a nechť $\varphi(x)$ říká „x je sudé číslo“ a $\psi(x)$ znamená „x je liché číslo“. Z věty „Všechna (přirozená) čísla jsou buď lichá nebo sudá“ ovšem neplyne „Všechna (přirozená) čísla jsou sudá nebo jsou všechna (přirozená) čísla lichá“.

Poznámka 1.14 *Věty 1.10 a 1.12 je užitečné srovnat z pohledu „vzájemné definovatelnosti kvantifikátorů“ viz. pozanámka 1.4.*

Věta 1.15 (záměna pořadí kvantifikátorů)

$$\forall x, \forall y : \varphi(x, y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x : \varphi(x, y)$$

$$\exists x, \exists y : \varphi(x, y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x : \varphi(x, y)$$

$$\exists x, \forall y : \varphi(x, y) \Rightarrow \forall y, \exists x : \varphi(x, y)$$

Příklad 1.16 *Poslední tvrzení předcházející věty opět nelze obrátit tj. obecně*

$$\forall y, \exists x : \varphi(x, y) \not\Rightarrow \exists x, \forall y : \varphi(x, y).$$

O neplatnosti tohoto tvrzení se můžeme snadno přesvědčit následujícím protipříkladem. Uvažujme množinu všech lidí a nechť je formule $\varphi(x, y)$ formalizací věty „x je matka y“. Pak je $\forall y, \exists x : \varphi(x, y)$ věta „Každý člověk má matku“ kdežto věta $\exists x, \forall y : \varphi(x, y)$ je symbolicky zapsané vyjádření „Existuje takový člověk, který je matkou všech lidí“. Zřejmě z věty „Každý člověk má matku“ neplyne „Existuje takový člověk, který je matkou všech lidí“.