Příklad řešení rovnice ve tvaru totálního diferenciálu

$$\boxed{(y^2+1)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0}$$

Nejprve zjistíme, zda je rovnice ve tvaru totálního diferenciálu (tj. zda je levá strana diferenciálem nějaké funkce $V(x,y)$). Pak by muselo platit

$$\frac{\partial(y^2+1)}{\partial y} = -\frac{\partial(x)}{\partial x}, \tag{1}$$

což je podmínka záměnnosti smíšených parciálních derivací funkce V druhého řádu. Protože podmínka (1) neplatí, musíme najít integrační faktor $\mu(x,y)$ tak, aby rovnice

$$\mu(y^2+1)\,\mathrm{d}x - \mu x\,\mathrm{d}y = 0,$$

která je s původní rovnicí ekvivalentní, již byla ve tvaru totálního diferenciálu. To znamená, aby platilo

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(y^2+1)\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu x\right]. \tag{2}$$

Zkusme nejprve hledat μ jako funkci x. Pak dostaneme z (2) podmínku na μ:

$$2y\mu(x) = -\mu(x) - x\mu'(x),$$

tedy po úpravě

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{1+2y}{x}.$$

Vidíme, že zatímco levá strana poslední rovnice závisí pouze na x, pravá strana závisí i na y, a tedy nelze najít (netriviální) řešení.

Druhá možnost je hledat μ jako funkci y. V tom případě vyjde z (2) rovnice pro μ ve tvaru

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{2y+1}{y^2+1},$$

která má řešení

$$\mu(y) = \frac{e^{-\operatorname{arctg} y}}{y^2+1}.$$

Po vynásobení touto funkcí přejde naše rovnice na tvar

$$e^{-\operatorname{arctg} y}\,\mathrm{d}x - \frac{xe^{-\operatorname{arctg} y}}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = 0. \tag{3}$$

Potenciál V nyní určíme následovně:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= e^{-\operatorname{arctg} y} \Rightarrow V(x,y) = xe^{-\operatorname{arctg} y} + \varphi(y), \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{xe^{-\operatorname{arctg} y}}{y^2+1} + \varphi'(y), \end{aligned}$$

srovnáním s rovnicí (3) tedy vidíme, že $\varphi'(y) \equiv 0$. Řešení naší rovnice je tedy dáno implicitním vztahem

$$V(x,y) = xe^{-\operatorname{arctg} y} = c.$$

Je vidět, že ve všech bodech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vyhovujících této rovnosti lze určit $x = x(y)$:

$$x = ce^{\operatorname{arctg} y},\ c, y \in \mathbb{R}.$$

Pokud $x \neq 0$, lze také určit $y = y(x)$:

$$y = \operatorname{tg}(\ln kx),\ k \neq 0,\ kx > 0.$$

Závěrem dodejme, že toto nebyla jediná volba integračního faktoru vedoucí k cílí – zkuste použít například $\mu(x,y) = \frac{1}{x(y^2+1)}$.