Příklady na 11. týden

Henri Lebesgue a jeho integrál

Fubiniho věta, věta o substituci

1. Převeďte $\int_\Omega f(x+y)dxdy$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a $\Omega = \{(x,y); |x|+|y| \le 1\}$.

2. Převeďte $\int_\Omega f(x \cdot y)dxdy$ na jednoduchý integrál, jestliže f je spojitá a Ω je ohraničeno křivkami $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$, x, $y > 0$.

3. Přepište $\int_0^1 (\int_y^1 f(x)dx)dy$ pomocí jednoho integrálu.

4. Určete plošný obsah části roviny omezené následujícími křivkami
   a) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$
   b) $(x^3+y^3)^2 = xy$
   c) $x+y = a$, $x+y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$.

5. Určete objem tělesa omezeného následujícími plochami
   a) $x+y+z = a$, $x^2+y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $a \ge R\sqrt{2} > 0$
   b) $z = xy$, $z = 0$, $x+y+z = 1$
   c) $z = x^2+y^2$, $x^2+y^2 = x$, $x^2+y^2 = 2x$, $z = 0$
   d) $z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2+y^2 = R^2$
   e) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, a, b, $c > 0$
   f) $(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})^2+\frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, a, b, $c > 0$
   g) $(x^2+y^2+z^2)^3 = 3xyz$

6. Spočtěte následující integrály
   a) $\int_{R^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}dxdy$
   b) $\int_\Omega x^{-p}y^{-q}dxdy$, $\Omega = \{(x,y); xy \ge 1, x \ge 1\}$
   c) $\int_\Omega (x+y)^{-p}dxdy$, $\Omega = \{(x,y); x+y \ge 1, 0 \le x \le 1\}$

7. Najděte souřadnice hmotného středu homogenní desky ohraničené $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, x, y, $a > 0$.

8. Najděte momenty setrvačnosti I_x a I_y homogenní desky s hustotou $\varrho = 1$ ohraničené $(x-a)^2+(y-a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $0 \le x \le a$.

9. Najděte souřadnice hmotného středu homogenního tělesa ohraničeného $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$, a, b, $c > 0$.

10. Najděte momenty setrvačnosti I_{xy}, I_{xz} a I_{yz} vzhledem k souřadnicovým rovinám pro homogenní těleso s hustotou $\varrho = 1$ ohraničené $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, a, b, $c > 0$.

11. Kruhový válec s osou ve směru osy z kartézských souřadnic je naplněn plynem, jehož hustota se řídí barometrickou formulí

$$\varrho = \varrho_0 \exp(-\frac{\varrho_0}{p_0} gz)\,,$$

kde p_0 je tlak na spodní základně $z = 0$, g je tíhové zrychlení. Výška válce je h, poloměr R. Určete hmotnost vzduchu ve válci.

Funkce více proměnných

Stefan Banach a jedna z jeho vět

12. Metodou postupných aproximací nalezněte řešení rovnice $y' = ax$, $y(0) = \kappa$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

13. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice $2x + \sin x = 1$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

14. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice

$$y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 s y(s) ds + x.$$

Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje. Srovnejte toto řešení s přesných řešením, které lze hledat ve tvaru $y(x) = \alpha x^2 + x$.