

ODR

Lineární rovnice n-tého řádu

Nalezněte obecná řešení rovnic, znáte-li jedno řešení (homogenní rovnice)

1.

$$(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad y = e^{ax}$$

2.

$$xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y = \frac{e^x}{x}$$

3.

$$(x + 1)xy'' + (x + 2)y' - y = x + \frac{1}{x}, \quad y = x + 2$$

4.

$$(2x + 1)y'' + (2x - 1)y' - 2y = x^2 + x$$

Jedno řešení je ve tvaru polynomu.

Funkce více proměnných

Parciální derivace

5. Spočítejte derivaci funkce $x^2 - y^2$ v bodě $(1,1)$ ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel $\frac{\pi}{3}$.

6. Najděte jednotkový vektor, v jehož směru má derivace $x^2 - xy + y^2$ v bodě $(1,1)$ největší, nejmenší a nulovou hodnotu.

7. Spočítejte $\frac{\partial F}{\partial u}$, kde $F = f(g)$, přičemž $f(x, y, z)$ je daná funkce a $g_1(u, v) = (u^2 - 1)/2v$, $g_2(u, v) = (u + v)/(u - v)$, $g_3(u, v) = u^2 - v^2$.

8. Nechť $f(s, t)$ je hladká nezáporná funkce na R^2 . Vyjádřete parciální derivace 1. řádu funkce $g(x, y) = f(x, y)^{f(y, x)}$ pomocí hodnot f a jejich parciálních derivací.

V následujících příkladech zjistěte, kde má funkce totální diferenciál. Určete ho.

9. $f(x, y) = \ln(x + y)$

10. $f(x, y, z) = \cos x \cosh y$

11. $f(x, y) = |x||y|$

12. $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$

13. $f(x, y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$

14. $f(x, y, x) = x^{\frac{y}{z}}$.

15. Necht $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro jaké hodnoty α bude mít funkce

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

totální diferenciál 1. řádu v bodě $(0, 0)$?

16. Napište diferenciál funkce $f(x, y, z)$, kde $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = 2uv$.

17. Necht f má totální diferenciál v bodě $(1, 1)$ a $g(t, u) = f(f(u, t), f(t, u))$.
Vypočtete $\frac{\partial g}{\partial x_1}(1, 1)$, je-li $f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 1) = 2$.

18. Spočtete $d^3 f$, je-li $f(x, y, z) = xyz$.

19. Pomocí diferenciálu spočtete přibližně

(a) $1,02^2 \cdot 2,003^3 \cdot 3,004^3$

(b) $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$