Příklady 4 – Variační počet.

1. Dokažte, že úloha

$$\Phi(y) = \int_{-1}^{1} x^2 [y']^2 \, dx \qquad y(-1) = -1, \; y(1) = 1$$

nemá minimum.

2. * Navrhněte tvar skluzavky tak, aby cesta z $[0, A]$ do $[B, 0]$ (kde A, $B > 0$) byla co nejrychlejší.

3. Najděte maximum $\Phi(y) = \int_{-1}^{1} y^2$, za podmínek $y(0) = y(\pi) = 0$ a $\int_{-1}^{1} [y']^2 = \pi/2$.

4. * Jaký tvar zaujme lano dané délky, zavěšené mezi dvěma stožáry?

5. Nalezněte extrémy následujících úloh:

   (a) $\Phi(y) = \int_1^3 2y - yy' + x[y']^2, \qquad y(1) = 1, \; y(3) = 4$

   (b) $\Phi(y) = \int_1^2 [xy' + y]^2, \qquad y(1) = 1, \; y(2) = 0.5$

   (c) $\Phi(y) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[y - \frac{1}{2}[y']^2\right] \sin x, \qquad y(\pi/4) = -\ln\sqrt{2}, \; y(\pi/2) = 0$

   (d) $\Phi(y) = \int_0^{\pi} [y']^2 - \frac{16}{9} y^2 + 2y \sin x \qquad y(0) = 0, \; y(\pi) = -\sqrt{3}/2$

   (e) $\Phi(y) = \int_0^{\pi} [y']^2 - \frac{25}{9} y^2 + 68 y \exp x \qquad y(0) = 9, \; y(\pi) = 9 \exp \pi$

   (f) $\Phi(y) = \int_0^1 x^2 y' + 2xy, \qquad y(0) = 0, \; y(1) = 1$

6. Pomocí Jacobiho věty vyšetřete extremály úloh:

   (a) $\Phi(y) = \int_0^{\pi} [y']^3, \qquad y(0) = 0, \; y(\pi) = a\pi \quad (a \neq 0)$

   (b) $\Phi(y) = \int_0^1 [y']^3 + 3[y']^2 + y', \qquad y(0) = 0, \; y(1) = 1$

   (c) $\Phi(y) = \int_1^2 x^2 [y']^3, \qquad y(1) = 0, \; y(2) = \ln 2$

   (d) $\Phi(y) = \int_1^2 y^3 [y']^3, \qquad y(1) = 2, \; y(2) = 2\sqrt{2}$

   (e) $\Phi(y) = \int_0^1 \frac{[y']^3}{y^3}, \qquad y(0) = 1, \; y(1) = e$

   (f) $\Phi(y) = \int_1^2 \left[[y']^2 - y^2\right] \exp(-2x), \qquad y(1) = e, \; y(2) = \exp(2)$