Matematická analýza 2

sylabus přednášky

1. Newtonův integrál

Zobecněná primitivní funkce: definice, věta o jednoznačnosti až na konstantu. Zobecněný přírustek funkce. Newtonův integrál: definice, terminologie - integrál existuje/konverguje. Per-partes a věta o substituci pro N.i., intervalová aditivita N.i. v případě konvergence. Věta: pro spojitou, nezápornou funkci N.i. vždy existuje; pro spojitou funkci, která má integrovatelnou majorantu, N.i. vždy konverguje. Důsledek: spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu má N.i. vždy konečný. Pojmy: velké 'Ó', řádová rovnost. Srovnávací věta pro N.i. Podmínky konvergence integrálu funkce x^a u 0 a $+\infty$.

2. Riemannův integrál

Dělení intervalu, horní a dolní součet, horní a dolní integrál. Definice Riemannova integrálu. Lemma o charakterizace existence. Příklady: Dirichletova a Riemannova funkce. Monotónní funkce má R.i. Stejnoměrná spojitost v R. Spojitá funkce na omezeném, uzavřeném intervalu je stejnoměrně spojitá. Důsledek: spojitá funkce na omezeném, uzavřeném intervalu má R.i. Intervalová aditivita horního a dolního integrálu, intervalová aditivita R.i. Integrál jakožto funkce horní meze: spojitost (všude), diferencovatelnost v bodech spojitosti integrandu. Důsledek: spojitá funkce má primitivní funkci. Pro spojitou funkci na omezeném, uzavřeném intervalu se Riemannův a Newtonův integrál shodují. Názorný význam integrálu: plocha pod grafem funkce v kartézských a polárních souřadnicích, objem rotačního tělesa, délka grafu funkce.

3. Řady

Řada, částečný součet řady. Součet řady. Terminologie: řada konverguje, diverguje, osciluje, diverguje do $\pm\infty$. Příklady: harmonická řada, geometrická řada. Věta o aritmetice řad. Nutná podmínka konvergence.

Řady s nezápornými členy - kritéria konvergence: srovnávací, d'Alembertovo (podílové), Cauchyho (odmocninové), integrální, Raabeho. Kritéria založená na řádové rovnosti, velkém 'Ó'.

Řady s obecně komplexními členy. Bolzano Cauchyho podmínka konvergence řady. Absolutní konvergence implikuje konvergenci. Neabsolutní konvergence. Leibnizovo kritérium. Abelovo sumační lemma. Dirichletovo a Abelovo kritérium. Omezenost částečných součtů $\sin(nx)$, $\cos(nx)$.

Přerovnávání řad. Řada s nezápornými členy přerovnáním součet nemění. Absolutně konvergentní řada přerovnáním součet nemění. Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu.
Cauchyův součin řad.
V rámci kapitoly též: komplexní čísla, reálná a imaginární část, absolutní hodnota, trojúhelníková nerovnost. Limita posloupnosti komplexních čísel. Charakterizace konvergence pomocí konvergence reálné a imaginární části. Důsledky: aritmetika limit v C, Bolzanova-Cauchyho podmínka platí v C. Pojmy řádová rovnost, velké 'Ó' pro posloupnosti.

4. Mocninné řady.

Mocninná řada. Terminologie: střed řady, poloměr konvergence, kruh konvergence, kružnice konvergence. Věta o poloměru konvergence. Podílové a odmocninové kritérium k výpočtu poloměru konvergence. Věta o derivování mocninné řady člen po členu. Důsledky: spojitost, derivace vyšších řádů, integrování člen po členu, souvislost mezi koeficienty a hodnotami derivací funkce ve středu. Rozvoje elementárních funkcí v mocninnou řadu. Pojem: funkce analytická v bodě. Příklad nekonečně diferencovatelné funkce, která není analytická.

5. Obyčejné diferenciální rovnice (I)

Obecná ODR řádu n. Pojmy: řešení, prodloužení řešení, maximální řešení. Rovnice tvaru y'=f(x,y). Věta o lokální existenci řešení pro spojitou pravou stranu (bez důkazu). Lemma o převedení rovnice na integrální tvar. Lipschitzova podmínka vůči y. Věta o jednoznačnosti řešení. Spojitost parciální derivace dle y implikuje Lipschitzovu podmínku. Základní typy rovnic prvního řádu a jak je řešit: rovnice autonomní, se separovanými proměnnými, lineární, homogenní, Bernoulliho. ¡p¿ Obecná lineární ODR řádu n. Věta o globální existenci a jednoznačnosti řešení (bez důkazu). Množina řešení homogenní rovnice stupně n je prostor dimenze n. Nalezení fundamentálního systému pro rovnici s konstantními koeficienty. Nehomogenní rovnice: tvar množiny řešení. Variace konstant. Věta o nalezení partikulárního řešení pro rci s konstantními koeficienty a speciální pravou stranu (bez důkazu).

X. Spočetné množiny. Mohutnost.

Spočetné množiny - definice, příklady, základní vlastnosti. Kartézský součin spočetných množin je spočetná množina. Racionální čísla jsou spočetná množina. Interval $(0, 1)$, reálná čísla nejsou spočetná množina. (Nepovinně: vyčíslitelná čísla jsou spočetná. Mohutnost množiny. Cantorova věta.)

6. Funkce více proměnných

Normovaný prostor. Příklady: R, C. Normy v R^p. V rámci normovaných prostorů: okolí bodu, limita funkce a posloupnosti, spojitost funkce, vztah limity a spojitosti. Heineho věta.
Speciálně v R^p: konvergence je ekvivalentní konvergenci po složkách. Výpočet limit v R^2 pomocí polárních souřadnic. Dodatek: konvergence k ∞ v R^p.
Derivace ve směru. Parciální derivace. Jacobiho matice, gradient. Totální diferenciál. Existence totálního diferenciálu implikuje spojitost. Vztah totálního diferenciálu a derivace ve směru, speciálně souvislost Jacobiho matice a diferenciálu. Spojitost parciálních derivací implikuje existenci totálního diferenciálu. Diferenciál složeného zobrazení. Věta o střední hodnotě.
Parciální derivace vyššího řádu. Věta o záměnnosti parciálních derivací. Diferenciál druhého řádu. Hessova matice. Vztah mezi diferenciálem druhého řádu a Hessovou maticí (bez důkazu).

7. Metrické prostory

Metrický prostor. Normovaný prostor a prostor se skalárním součinem jako speciální případy metrického prostoru. V rámci metrických prostorů: okolí bodu, limita posloupnosti, limita funkce. Heineho věta o charakterizaci limity funkce pomocí posloupností. Spojitost funkce. Vztah limity a spojitosti. Charakterizace spojitosti pomocí posloupnosti (bez důkazu).
Otevřená množina. Okolí je otevřená množina. Věta o sjednocení a průniku otevřených množin. Charakterizace spojitosti: vzor otevřené je otevřená. Uzavřená množina. Charakterizace pomocí posloupností. Vnitřek, hranice, uzávěr a vnějšek množiny.
Posloupnost a podposloupnost. Dvě ekvivalentní definice hromadného bodu. Pojem: kompaktní množina. Kompaktní množina je uzavřená. Pojem: omezená množina (pro normované prostory.) Kompaktní množina v normovaném prostoru je omezená. Věta: kompaktní množiny v R^p jsou právě všechny omezené a uzavřené. Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina. Kompaktní množina v R má nejmenší a největší prvek. Důsledek: spojitá funkce na kompaktu nabývá maxima a minima. Nepovinně: charakterizace kompaktu pomocí otevřených pokrytí.
Spojitost funkce na množině. Stejnoměrná spojitost. Spojitá funkce na kompaktu je stejnoměrně spojitá. Lipschitzovská funkce jako speciální případ stejnoměrné spojitosti. Příklady lipschitzovských funkcí. Věta: spojitá funkce se spojitým, omezeným gradientem na otevřené konvexní množině v R^p je

lipschitzovská. Lemma o ekvivalenci norem v R^p. Důsledek: pojmy konvergence, otevřenosti, uzavřenosti nezávisí v R^p na zvolené normě.
Bolzano-Cauchyova podmínka. Konvergentní posloupnost je cauchyovská. Úplný prostor. Příklady: R, C jsou úplné. Věta: R^p je úplný prostor. Uzavřená množina v úplném prostoru je úplný prostor. Každý kompaktní prostor je úplný. Banachova věta o kontrakci.