Příklad 1

Převedeme rovnici na tvar

$$y' = \frac{1}{y}(y^2-4)^2 =: g(y)\ .$$

(Tato úprava je BÚNO, protože žádné řešení rovnice zřejmě nemůže nabývat hodnoty $y = 0$). Funkce $g(y)$ je spojitá a má spojitou derivaci dle y v každém bodě (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$. Tedy každým takovým bodem prochází právě jedno řešení.

Zřejmě $y \equiv \pm 2$, $x \in R$ jsou maximální řešení. Intervaly, v nichž je $g(y)$ spojitá a nenulová, jsou:
(1) $y \in (-\infty, -2)$
(2) $y \in (2, \infty)$
(3) $y \in (-2, 0)$
(4) $y \in (0, 2)$.
Hledejme nejprve řešení splňující (1):

$$\frac{yy'}{(y^2-4)^2} = 1$$

Protože

$$\int \frac{y}{(y^2-4)^2}\,dy = \frac{-1}{2(y^2-4)} =: F(y),$$

hledané řešení splňuje

$$F(y) = \frac{-1}{2(y^2-4)} = x + c.$$

Protože $F((-\infty,-2)) = (-\infty, 0)$, máme definiční obor omezen podmínkou $x < -c$. Z rovnice snadno vyjádříme

$$y^2 = 4 - \frac{1}{2(x+c)}$$

a vzhledem k (1) je tedy

$$y = -\sqrt{4 - \frac{1}{2(x+c)}}, \qquad x < -c$$

pro každé (pevné) $c \in R$ hledaným řešením. Toto řešení je zjevně maximální (limita v bodě $-c$ je $-\infty$).
Analogicky v případě (2) dostaneme řešení

$$y = \sqrt{4 - \frac{1}{2(x+c)}}, \qquad x < -c.$$

Za podmínky (3) počítáme podobně – z toho, že $F((-2,0)) = (1/8, +\infty)$, je definiční obor $x > 1/8 - c$. Řešení

$$y = -\sqrt{4 - \frac{1}{2(x+c)}}, \qquad x > 1/8 - c$$

je opět maximální: limita v bodě $1/8 - c$ je 0, avšak z rovnice je vidět, že žádné řešení nemůže nabývat hodnoty $y = 0$.
Analogicky v případě (4) dostaneme řešení

$$y = \sqrt{4 - \frac{1}{2(x+c)}}, \qquad x > 1/8 - c.$$

Diskuse: námi nalezená řešení jsou maximální a zjevně vyplní celou rovinu mimo osy $y = 0$. Vzhledem k jednoznačnosti, zaručené mimo osu $y = 0$, se zde žádná jiná řešení nenacházejí, a není možné ani napojování. Vlastní osu $y = 0$ pak žádná řešení nemohou protnout. Nalezli jsme tedy všechna maximální řešení.
Příklad 2 Poloměr konvergence určíme odmocninovým kritériem:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|(-2)^n + \frac{3^n}{3n}\right|} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{3n}} \cdot \sqrt[n]{3n\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 1} \to 3 \cdot 1 \cdot 1.$$

Tudíž $R = 1/3$. Obecné číslo na kružnici konvergence můžeme zapsat jako $x = \exp(i\phi)/3$, kde $\phi \in [0, 2\pi)$. Dosazením

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\phi n) \left(\frac{-2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(i\phi n)}{3n} = S1 + S2$$

S1 konverguje absolutně pro každé ϕ (pozn.: $|\exp(i\pi n)| = 1$). Řada

$$\sum \exp(i\phi n)$$

má pro každé reálné $\phi \neq 2k\pi$ omezené částečné součty. Tedy S2 konverguje pro $\phi \in (0, 2\pi)$, a to neabsolutně, pro $\phi = 0$ (x=1/3) diverguje.
Závěr: původní řada konverguje neabsolutně ve všech bodech kružnice konvergence s výjimkou bodu $x = 1/3$, kde diverguje.
S pomocí vzorců

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad |x| < 1$$

je součet řady v kruhu konvergence

$$\frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{1-3x}\right).$$

Příklad 3 Integrál rozdělíme (apriorní předpoklad je $a > 0$!)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1/x)}{\sin(\pi x^a)}\, dx = \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{1-\delta} + \int_{1-\delta}^{1} = I1 + I2 + I3.$$

I2 je vždy konečný (spojitá funkce na omezeném, uzavřeném intervalu).
Protože $\sin(\pi x^a) \sim x^a$ pro $x \to 0+$, je (pro δ dost malé) I1 konečný, právě když konverguje integrál:

$$J := -\int_0^{\delta} \frac{\ln x}{x^a}\, dx$$

Je-li $a \geq 1$, je (BÚNO $\delta < 1/e$)

$$J \geq \int_0^{\delta} \frac{dx}{x} = +\infty$$

Naopak, je-li $a \in (0, 1)$, zvolme $b \in (a, 1)$. Potom

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{x^b} \cdot \left[x^{b-a} \ln x\right].$$

Výraz v hranaté závorce je na pravém okolí 0 omezený (má konečnou limitu zprava), zatímco funkce $1/x^b$ je zde integrovatelná. Tedy J a potažmo I1 konverguje právě když $a \in (0, 1)$.

Integrál I3 konverguje vždy (integrand má konečnou limitu v bodě 1 zleva, je tedy omezený na (omezeném!) intervalu $(1-\delta, 1)$).
Příklad 4 Přepíšeme funkci jako

$$\frac{xy}{\exp(-y^2)[\exp(x^2+y^2)-1]}\ ,$$

což má zjevně smysl pro $(x,y) \neq (0,0)$. K výpočtu limity rozšíříme

$$\frac{1}{\exp(-y^2)} \cdot \frac{x^2+y^2}{\exp(x^2+y^2)-1} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2}$$

První dva součinitele mají limitu 1, třetí limitu nemá, nicméně je omezený. Tedy celková limita neexistuje, ale funkce je na prstencovém okolí počátku omezená.