Veta D. Existuje prave jedna funkce $\ln(x)$ s definicnim oborem $(0, \infty)$ takova, ze

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pro kazde x, $y \in (0, \infty)$,
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
3. $\ln(x)$ je rostouci a spojita na $(0, \infty)$.

Tato veta bude dokazana pozdeji: bude nutno dokazat za prve, ze takova funkce existuje, a za druhe, ze je vlastnostmi 1 – 3 urcena jednoznacne.

Z vlastnosti 1 – 3 lze dedukovat vsechny dalsi vlastnosti funkce $\ln x$:

- $\ln 1 = 0$, nebot $\ln 1 = \ln(1.1) = \ln 1 + \ln 1$
- $\ln(1/x) = -\ln(x)$, nebot $0 = \ln 1 = \ln(x \cdot 1/x) = \ln(x) + \ln(1/x)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$
- $\ln(\sqrt[k]{x}) = (1/k) \ln(x)$ pro $k \in \mathbb{N}$, $x > 0$, nebot $\ln(x) = \ln((\sqrt[k]{x})^k) = k \ln(\sqrt[k]{x})$
- $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$. Chceme ukazat, ze $(\forall K > 0)(\exists L > 0)(x > L \implies \ln(x) > K)$. Necht $K > 0$ dano: protoze $2 > 1$ a $\ln(x)$ je rostouci, je $\ln 2 > 0$ a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, ze $n \ln 2 > K$. Pak ovsem pro $x > L := 2^n$ je $\ln(x) > \ln(2^n) = n \ln 2 > K$, q.e.d.
- $\lim_{x \to 0+} = -\infty$, nebot

$$\lim_{x \to 0+} \ln(x) = \lim_{y \to \infty} \ln(1/y) = \lim_{y \to \infty} [-\ln(y)] = -\infty.$$