Úvod.

Reálná analýza se zabývá množinou reálných čísel R a funkcemi z R do R. Vyjdeme-li z obecnějšího principu, že analýza se zabývá kvantitativními vlastnostmi světa kolem nás, pak reálná analýza studuje nejjednoduší rozprostraněný útvar: přímku. Množina R je v tomto pojetí modelem, jehož prostřednictvím analýza přímku chápe.

Díváme-li se na věc takto, lze si položit otázku, zda je R z hlediska analýzy jediným možným či nejlepším modelem přímky. Dobrý model musí především mít vlastnosti, které podle našeho mínění má samotná přímka. Například množina Q všech racionálních čísel není dobrým modelem, neboť neobsahuje bod $\sqrt{2}$, o němž se domníváme, že na přímce leží, neboť ho tam můžeme pomocí kružítka a pravítka zakreslit.

Dobrý model by měl ale také odpovídat způsobu uvažování, jemuž hodláme přímku podrobit. To je druhý důvod, proč analýza potřebuje bod $\sqrt{2}$. Na přímce totiž chce provádět určité početní operace, a odmocňování je jednou z nich.

Ústředním motivem analýzy, který nacházíme ve všech jejích základních pojmech, jako jsou spojitost, limita, derivace či integrál, je početní operace, či spíše jistý početní proces, při němž od určité veličiny dospíváme k jiné veličině tím způsobem, že jistý parametr se stává neomezeně malým nebo neomezeně velkým. Například tečnu křivky získáme tak, že protneme graf funkce ve dvou bodech, které se k sobě neomezeně blíží. Plochu pod grafem funkce spočítáme tak, že vepisujeme stále užší a užší obdélníčky. Délku křivky stanovíme tak, že ji nahrazujeme stále těsněji se přimykající lomenou čarou.

Možná námitka vůči množině R coby vhodnému nástroji analýzy se skrývá v tom, že ačkoliv myšlenka nekonečně malé (nekonečně velké) veličiny je ve všech uvedených základních pojmech analýzy nepochybně obsažena, samotná množina R žádná nekonečně malá čísla neobsahuje, a výše zmíněné pojmy musí být tedy definovány nepřímo. Kupříkladu funkci f prohlásíme v bodě x_0 za spojitou, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \left[|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right] \tag{1}$$

Rozpoznat v této formuli nám intuitivně známý pojem spojitosti není úplně triviální záležitost a vyžaduje to určitý typ tréninku.

Pohled do historie.

Pohled do historie nám říká, že analýza původně s nekonečně malými čísly pracovala. Například již P. de Fermat kolem roku 1630 publikoval spisek, v němž popisoval metodu nalezení minima funkce (například) $f(x) = x^2 + 3x$ následující úvahou: je-li bod x_0 minimum, je zřejmé, že hodnota v x_0 musí být (takřka) stejná jako hodnota v sousedním bodě $x_0 + E$. Tedy

$$x_0^2 + 3x_0 = (x_0 + E)^2 + 3(x_0 + E) \tag{2}$$

$$x_0^2 + 3x_0 = x_0^2 + 2x_0E + E^2 + 3x_0 + 3E \tag{3}$$

$$0 = 2x_0E + E^2 + 3E \qquad / : E \tag{4}$$

$$0 = 2x_0 + E + 3 \tag{5}$$

Číslo E nyní zanedbáme a máme $x_0 = -3/2$.

Tato úvaha elegantně dospívá ke správnému výsledku (jak se lze přesvědčit například doplněním na čtverec), avšak mate nás tím, že klíčové číslo E zde hraje dvojakou roli: pokud jím dělíme, musí být nenulové, ale pokud ho můžeme zanedbat, mělo by být přece nula!

Je pochopitelné, že analýza v této podobě byla – i přes řadu pozoruhodných výsledků, k nimž dospěla – často terčem kritiky, a nejpozději počátkem 19. století bylo zřejmé, že nejen z hlediska dalšího rozvoje analýzy samé bude nutné postavit tuto disciplínu na solidnější základy. Začíná tzv. období revize základů analýzy, které vrcholí v pracech K. Weierstrasse. Analýza vypouští ze svého slovníku termíny "nekonečně malé" a "nekonečně velké" a začíná hovořit tzv. epsilon–delta jazykem, jehož příkladem je definice spojitosti (1) uvedená výše. Získává tím kýžený rigorózní základ, ale na druhou stranu již nemůže hovořit nezprotředkovaně o tom, co je její základní myšlenkou.

Hyperreálná čísla

V šedesátých letech dvacátého století si A. Robinson uvědomil, že současná matematická logika již obsahuje nástroje, které umožňují analýze vrátit nekonečně malé veličiny, a to zcela rigorózním způsobem. Jím navržená a poté podrobně rozpracovaná *nestandardní analýza* chápe přímku prostřednictvím množiny $^*R$ tzv. hyperreálných čísel.

$^*R$ je zvláštním způsobem zkonstruovaná číselná množina, která kromě každého obyčejného (standardního) čísla z R obsahuje další čísla, tomuto číslu nekonečně blízká. Tento pojem má zde tento přesný význam: čísla x, $y \in {}^*R$

jsou si *nekonečně blízká*, pokud $|x-y| < \varepsilon$ pro každé kladné $\varepsilon \in R$. Speciálně číslo z $^*R$ se nazve *nekonečně malé*, pokud je nekonečně blízko nuly.
Vtip je v tom, že zatímco v R jsou si nekonečně blízká pouze čísla sobě rovná, množina $^*R$ skutečně dvojice čísel sobě nekonečně blízkých, leč navzájem různých, obsahuje. Podobně jediné nekonečně malé číslo v R je nula, zatímco $^*R$ obsahuje kromě nuly i další (kladná a záporná) nekonečně malá čísla.
Dále obsahuje $^*R$ nekonečně velká kladná čísla, tj. čísla, větší než libovolné číslo z R, zároveň však (ostře) menší než $+\infty$, a stejně tak nekonečně velká záporná čísla, tedy čísla, menší než každé číslo z R (ale větší než $-\infty$.)

Nebudeme zde popisovat, jak množinu $^*R$ sestrojit, ale všimneme si některých jejích vlastností a ukážeme si, jaké typy úvah lze v nestandardní analýze provádět.

Především $^*R$ je číselná množina, a můžeme v ní tedy sčítat, odčítat, násobit a dělit nenulovým číslem, přičemž tyto operace se řídí zcela stejnými pravidly jako v R. Stejnými pravidly jako v R se řídí i uspořádání relacemi $<$ a $>$.

Poznamenejme, že můžeme mezi sebou násobit i nekonečně malá a nekonečně velká čísla - v takovém případě však nelze předem říci, zda výsledkem bude číslo nekonečně malé, nekonečně velké, či ani jedno z obojího. Naproti tomu pokud násobíme číslo nekonečně malé číslem, které není nekonečně velké, výsledkem je vždy číslo nekonečně malé. Podobně pokud číslo, které není nekonečně malé, vynásobíme číslem, které je nekonečně velké, je výsledkem číslo nekonečně velké. (Je užitečné porovnat tato fakta s klasickými větami o výpočtu nevlastních limit.)

Obecně však není pravda, že cokoliv platí o R, platí i o $^*R$. Například množina R má tzv. Archimédovu vlastnost: pokud $r \in R$ je libovolné kladné číslo, pak existuje n přirozené tak, že r sečteno n-krát je větší než jedna. Je zřejmé, že $^*R$ tuto vlastnost nemá, neboť zvolíme-li $r > 0$ nekonečně malé, je $r + r + \cdots + r$ vždy opět nekonečně malé, a tedy menší než 1.
Archimédovu vlastnost můžeme ale chápat formálněji takto: pro každé $r \in R$ kladné existuje $n \in N$ takové, že r krát n je větší než jedna. Tomuto výroku již odpovídá následující pravdivý výrok o $^*R$: pro každé $r \in {}^*R$ kladné existuje $n \in {}^*N$ takové, že r krát n je větší než jedna. Symbol $^*N$ značí množinu hyperpřirozených čísel, tj. čísel, která vzniknou tak, že k obyčejným přirozeným číslům přidáme další přirozená čísla, která jsou nekonečně velká.

V množině $^*R$ také neplatí axiom o supremu: označme M množinu všech nekonečně malých čísel. Tato množina je neprázdná a shora omezená (například číslem 1). Předpokládejme, že $S \in {}^*R$ je supremum M. Protože M obsahuje (nekonečně malá) kladná čísla, je $S > 0$. Nyní jsou dvě možnosti: S buď je, nebo není nekonečně malé číslo, oba případy však vedou ke sporu. Je-li totiž S nekonečně malé, je i $2S$ nekonečně malé, tedy $2S \in M$, ale pak S není horní odhad M. Pokud naopak S není nekonečně malé, není ani $S/2$ nekonečně malé, ale pak je $S/2$ horním odhadem M, a S tedy není nejmenší horní odhad.

Výhodou nestandardní analýzy je, že základní pojmy a důkazy základních vět jsou zde – na rozdíl od klasické analýzy – velmi intuitivní.

Například funkce se prohlásí za spojitou v bodě x_0, pokud $f(x_0 + \varepsilon)$ je nekonečně blízké k $f(x_0)$ pro každé ε nekonečně malé. Ověřme, že funkce $f(x) = x^2$ je podle této definice spojitá v každém bodě $x_0 \in R$:

$$(x_0 + \varepsilon)^2 - x_0^2 = 2x_0\varepsilon + \varepsilon^2$$

a to je zřejmě nekonečně malé. Ovšem pozor: je zde podstatný předpoklad, že x_0 je v R, protože pokud by například x_0 bylo nekonečně velké, nemusel by součin $x_0\varepsilon$ být nekonečně malý. A je skutečně pravda, že funkce $f(x) = x^2$ není (podle této definice) spojitá v nekonečně velkých $x_0 \in {}^*R$.

Víme, že množina ${}^*R$ obsahuje jednak čísla nekonečně velká (kladná a záporná), a jednak čísla nekonečně blízká číslům z ${}^*R$. Lze ukázat, že žádná jiná již neobsahuje:

Tvrzení: Nechť $y \in {}^*R$ není nekonečně velké. Pak existuje $x_0 \in R$ takové, že $x_0 - y$ je nekonečně malé.
Důkaz: označme $M := \{x \in R : \ x < y\}$. Protože y není nekonečně velké, je $M \subset R$ neprázdná, shora omezená. Budiž $x_0 \in R$ její supremum. Rozlišme dva případy: je-li $x_0 = y$, jsme hotovi. Zbývají dvě možnosti:
(a) případ $x_0 < y$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo z R. Protože x_0 je horní odhad M a $x_0 + \varepsilon > x_0$, nutně $x_0 + \varepsilon \notin M$, což je totéž jako $x_0 + \varepsilon \geq y$. Tedy $x_0 < y \leq x_0 + \varepsilon$ pro každé kladné reálné ε, neboli x_0 je nekonečně blízko y.
(b) případ $y < x_0$. Nechť $\varepsilon > 0$ reálné je dáno. Protože $x_0 - \varepsilon < x_0$, existuje dle druhé vlastnosti suprema nějaké $\tilde{x} \in M$ takové, že $x_0 - \varepsilon > \tilde{x}$. Ovšem $\tilde{x} \in M$, tedy $\tilde{x} < y$, a celkem dostáváme $x_0 - \varepsilon < \tilde{x} < y < x_0$. Protože ε bylo opět libovolné, je x_0 dle definice nekonečně blízko y.

Jedním ze základních tvrzení analýzy je takzvaná
Darbouxova věta. Nechť $f : [a, b] \to R$ je spojitá funkce, a nechť $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Pak mezi body a a b existuje bod c takový, že $f(c) = 0$.

Toto tvrzení je velmi názorné a lze si představit asi takovéto intuitivní zdůvodnění: vyjdeme z bodu a a jdeme směrem k b, až dojdeme do posledního bodu, kde je $f < 0$. V následujícím bodě je tedy již $f \geq 0$. Spojitost zaručuje, že hodnoty funkce v těchto bodech jsou si nekonečně blízko, a tedy (nekonečně blízko) 0.
Klasická analýza tento důkaz nemůže přijmout, protože nezná pojem 'sousedního' bodu. Též dobře ví, že množina bodů, v nichž je f záporná, je obecně nekonečná, a nelze tedy spoléhat na to, že má poslední bod.

Nestandardní analýza naopak naši 'naivní' úvahu umí reprodukovat takřka doslovně: zvolíme libovolné nekonečné hyperpřirozené číslo N a položíme

$$D = \left\{ a + \frac{i}{N}(b-a) : \; i \in {}^*N, \; 1 \leq i \leq N \right\},$$

Množina D není nic jiného než rovnoměrné dělení intervalu nekonečně malými dílky velikosti $1/N$. Množina D je příkladem tzv. *hyperkonečné množiny*. Hyperkonečné množiny jsou v nestandardní analýze velmi oblíbené, protože leží na pomezí mezi konečnými a nekonečnými množinami a slučují v sobě dobré vlastnosti obou typů. Naše D je dost velká, neboť s nekonečně malou chybou aproximuje každý bod v $[a, b]$, ale má tu dobrou vlastnost konečných množin, že její podmnožina

$$M = \{x \in D : \; f(x) < 0\}$$

má největší bod. Označme jej y: potom $f(y) < 0$, $f(y + 1/N) \geq 0$ a úvahou předvedenou výše díky spojitosti vyplývá, že $f(y)$ je nekonečně blízko 0. Podle dříve dokázaného tvrzení existuje bod $c \in R$ nekonečně blízký y, a opět ze spojitosti musí být $f(c) = 0$.