Plizive lemma. *Necht* $[a,b]$ *je omezeny, uzavreny interval a necht* M *je podmnozina* $[a,b]$, *splnujici nasledujici tri vlastnosti:*

(1) bod a *je prvkem* M;

(2) pokud $x_0 \in M$ *a* $x_0 < b$, *existuje* $y \in M$ *takove, ze* $y > x_0$;

(3) pokud $x_0 \in (a,b]$ *pokud* x_0 *ma navic tu vlastnost, ze*

$$(\forall x < x_0)(\exists y \in M)[x < y \le x_0], \qquad (*)$$

pak $x_0 \in M$.

Ze techto tri predpokladu je $b \in M$.

Poznamka: Vlastnost (2) rika, ze za kazdym bodem M mensim nez b lezi jeste alespon jeden vetsi. Vyrok (*) se da ekvivalentne napsat jako

$$(\forall \delta > 0)(\exists y \in M)[y \in \mathcal{U}_{-}(x_0,\delta)]$$

(staci polozit $\delta = x_0 - x$.) Vlastnost (3) tedy rika, ze bod intervalu $(a,b]$, jehoz kazde leve okoli na neprazdny prunik s M, je tez prvkem M.

Cele tvrzeni je o tom, ze kombinaci (2) a (3) se lze 'doplizit' z bodu a do bodu b.

Dukaz pliziveho lemmatu: Polozme $S = \sup M$. Protoze $M \subset [a,b]$, je $S \le b$. Dale protoze $a \in M$, dle (2) existuje $y \in M$, $y > a$, a tedy $S > a$.
Z vlastnosti (3), pouzite na $x_0 = S$ vsak nyni plyne, ze $S \in M$. Nebot jak ukazano vyse, $S \in (a,b]$ a vyrok (*) neni nic jineho nez druha vlastnost suprema.
Dukaz bude zavrsen, ukazeme-li, ze $S = b$. Necht tomu tak neni: protoze jiz vime, ze $S \le b$, muselo by to znamenat, ze $S < b$. Avsak $S \in M$, a tedy dle vlastnosti (1) by existovalo nejake $y > S$, $y \in M$. To je ale spor s tim, ze S je horni odhad M.