Cvičení 47: Dokažte, že dané funkce jsou řešeními diferenciálních rovnic:

$$y(x) = x^2 \log x \quad \text{řeší rovnici} \quad xy''' = 2,$$
$$x(y) = y + \log y \quad \text{řeší rovnici} \quad xy'' + (y')^3 - (y')^2 - y \log y = 0.$$

Cvičení 48: Ukažte, že pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce $y(x) = cx + c(1+c^2)^{-1/2}$ řešením diferenciální rovnice

$$-xy' + y = y'\big(1 + (y')^2\big)^{-1/2}\,!$$

Cvičení 49: Popište obecná řešení diferenciálních rovnic

$$y' = \sin x\,, \quad y' = |x|\,,$$
$$y' = \operatorname{tg} x\,, \quad y' = \exp(-1/x^2)\,.$$

$\Big[\{y(x) = -\cos x + c\,;\ c \in \mathbb{R}\}, \quad \{y(x) = x^2 \operatorname{sgn} x + c\,;\ c \in \mathbb{R}\},$
$\big\{\{y(x) = -\log|\cos x| + c\,, x \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)\,;\ c \in \mathbb{R}\}\,; k \in \mathbb{Z}\big\},$
$\{y(x) = c_1 + \int_0^x \exp(-1/t^2)\,dt\,,\ x \in (0,\infty)\,; c_1 \in \mathbb{R}\} \cup$
$\cup\, \{y(x) = c_2 - \int_x^0 \exp(-1/t^2)\,dt,\ x \in (-\infty, 0)\,; c_2 \in \mathbb{R}\}\Big]$

Cvičení 50: Řešte rovnici $y' = f(x)$ pro

$$\text{(a) } f(x) = (x^2+1)^{-1/2}\,, \quad \text{(b) } f(x) = (x^2-1)^{-1/2}\,.$$

[Stručněji: $y(x) = \log\big(x + \sqrt{x^2+1}\big) + c$ na $\mathbb{R}$; $y(x) = \log|x + \sqrt{x^2-1}| + c$, ale na každém ze dvou intervalů $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$ zvlášť!]

Cvičení 51: Řešte diferenciální rovnice

$$y' = y\,, \quad y' = 1 + y\,!$$

$[y(x) = c\exp x\,; \quad y(x) = -1 + c\exp x\,]$

Pokuste se vyřešit následující dvě úlohy, k nimž namáte ještě celé teoretické zázemí (není to však těžké!):

Cvičení 52: Řešte podobným postupem „ad hoc“ nelineární diferenciální rovnice

$$y' = 1 + y^2\,, \quad y' = 1/(3y^2)\,!$$

$[y(x) = \operatorname{tg}(x+c)$; je delikátnější: viz následující cvičení]

Cvičení 53: Řešeními rovnice $y' = 1/(3y^2)$ jsou funkce $y(x) = (x+c)^{1/3}$, a to na intervalech $(-\infty, c)$ a $(c, +\infty)$; řešení je v podstatě popsáno kubickými parabolami $x = y^3 + c$, ale to se vymyká popisu, který užíváme. Jinak: rovnice $y' = -x/y$ popisuje oblouky kružnic o středu v počátku, celé kružnice lze popsat při vhodné interpretaci rovnicí $xdx + ydy = 0$. Řešení podobných rovnic odpovídá nalezení funkce dvou proměnných, je-li dána její derivace (diferenciál).

Cvičení 54: Řešte rovnice

$$(a)\quad y' + 2y = 4x\,, \quad (b)\quad x(y'-y) = (1+x^2)\exp x\,,$$
$$(c)\quad (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$$

[(a) $y(x) = c\exp(-2x) + 2x - 1$, (b) $\exp(x)\bigl(\log|x| + x^2/2 + c\bigr)$,
(c) $y(x) = (1+x^2)(x+c)$]

Cvičení 55: Řešte rovnice

$$(a)\quad 2xy' - y = 3x^2\,, \quad (b)\quad 3xy' - 2y = x^3/y^2\,,$$
$$(c)\quad y' - \frac{ny}{x+1} = (1+x)^n\exp x\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[(a) $y(x) = c\sqrt{x} + x^2$, (b) $y^3 = cx^2 + x^3$,
(c) $y(x) = (x+1)^n(c + \exp x)$]

Na lineární diferenciální rovnice prvního řádu vede řada (pseudo)praktických úloh: poskytují jednoduché modely pro široké spektrum úloh:

Cvičení 56: Izotop stroncia ^{90}Sr se rozpadá exponenciálně podle rovnice $y' = -ay$, $a > 0$. Poločas jeho rozpadu, což je doba, za kterou se z daného množství rozpadne polovina, činí 28,1 roku. Určete a a dobu, za kterou se z 1kg rozpadne 900 g! [$a = \log 2/28,1 \doteq 0,025$; 93,3 roku]

Cvičení 57: Zrychlení lokomotivy, jejíž počáteční rychlost je v_0 je přímo úměrné tažné síle F a nepřímo úměrné hmotě m vlaku. Pro tah platí $F(t) = b - kv(t)$, kde b a k jsou konstanty a $v(t)$ rychlost v čase t. Určete vzorec pro tah v závislosti na čase t! [$F(t) = (b - kv_0)\exp(-kt/m)$]

Cvičení 58: Najděte ortogonální křivky ke svazku parabol $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$!
[Je to svazek elips, který popisuje vztah $x^2/2 + y^2 = c$, $c > 0$.]
V následujících čtyřech cvičeních najděte řešení jednoduchých (nelineárních) diferenciálních rovnic; cvičení ilustrují některé jevy, s nimiž se můžeme setkat a které „naše teorie nepokrývá“.

Cvičení 59: Řešte rovnici

$$(*)\qquad (y')^3 - 2x(y')^2 + y' = 2x\,!$$

[Rovnice $(*)$ je ekvivalentní rovnici $y' - 2x = 0$; jejím řešením je $y(x) = x^2 + c$.]

Cvičení 60: Řešte rovnici $(y')^2 - 1 = 0$! [Tato rovnice je ekvivalentní s dvojicí rovnic $y' = \pm 1$, přičemž φ je jejím řešením, pokud vyhovuje alespoň jedné z rovnic uvažované dvojice. Každým bodem $[x_0, y_0]$ procházejí právě dvě maximální řešení $\varphi(x) - y_0 = \pm(x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$.]

Cvičení 61: Řešte rovnici

$$(*)\qquad (y')^2 + y(y-x)y' - xy^3 = 0\,!$$

[Rovnice je ekvivalentní dvojici rovnic $y' + y^2 = 0$, $y' - xy = 0$; řešením první je $y(x) = (x+c)^{-1}$, $x \in (-\infty, -c)$, $c \in \mathbb{R}$, a $y(x) = (x+c)^{-1}$, $x \in (-c, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$, spolu s triviálním řešením $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$; řešením druhé je $y(x) = c\exp(x^2/2)$, $c \in \mathbb{R}$. Funkce φ je řešením $(*)$, je-li řešením alespoň jedné z těchto dvou rovnic. Všimněte si, kolik (maximálních) řešení je určeno podmínkou $y(x_0) = y_0$ pro každý bod $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$!]