Věta. Nechť n přirozené je dáno. Potom pro každé $x \geq 0$ existuje právě jedno $y \geq 0$ tak, že $y^n = x$.

Důkaz. Jednoznačnost: ukážeme, že existuje nejvýše jedno takové y. Sporem: nechť pro nějaké n přirozené a $x \geq 0$ existují y_1, $y_2 \geq 0$ tak, že $y_1 \neq y_2$, avšak

$$y_1^n = x = y_2^n \tag{1}$$

Ovšem $y_1 \neq y_2$ znamená, že buď $y_1 < y_2$, nebo $y_1 > y_2$. Tedy také $y_1^n < y_2^n$ nebo $y_1^n > y_2^n$, což je ve sporu s rovností (1).

Existence: rozlišíme čtyři případy.

(i) $x = 0$ – stačí volit $y = 0$

(ii) $x \in (0,1)$ – ukážeme níže, že pak existuje $y > 0$ takové, že $y^n = x$.

(iii) $x = 1$ – stačí volit $y = 1$

(iv) $x > 1$ – převedeme na bod (ii). Je-li dáno $x > 1$, položíme $\tilde{x} = 1/x$, tedy $\tilde{x} \in (0,1)$. Dle bodu (ii) existuje $\tilde{y} > 0$ tak, že $\tilde{y}^n = \tilde{x}$. Odsud pak $(1/\tilde{y})^n = 1/\tilde{x} = x$, tj. $y = 1/\tilde{y}$ je hledané číslo.

Zbývá vyřešit případ (ii). Je dáno $x \in (0,1)$. Definujme množinu

$$M = \{z \geq 0; z^n \leq x\}$$

Protože $x < 1$, je $x^n \leq x$, tedy $x \in M$ a M je neprázdná. Dále M je shora omezená číslem 1, neboť $z > 1$ implikuje $z^n > 1$, a tedy $z \notin M$. Dle axiomu suprema existuje $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y = \sup M$.

Ukážeme, že $y > 0$ a že platí $y^n = x$. Protože už víme, že $x \in M$ a $x > 0$, a protože $y \geq x$ (1. vlastnost suprema), je jistě $y > 0$.

Rovnost $y^n = x$ dokážeme tak, že obě alternativy ($y^n < x$ a $y^n > x$) přivedeme ke sporu.

Budeme potřebovat dvě pomocné nerovnosti: Bernoulliho nerovnost, podle níž

$$(1+a)^n \geq 1 + na \qquad \forall a > -1 \tag{2}$$

a elementární nerovnost

$$(1+a) \leq \frac{1}{1-a} \qquad \forall a \in (0,1) \tag{3}$$

– po násobení číslem $(1-a) > 0$ přechází na zřejmě pravdivou nerovnost $(1+a)(1-a) = 1 - a^2 \leq 1$.

Předpokládejme nejprve, že $y^n < x$. Ukážeme, že pro dost malé $\varepsilon > 0$ je

$$(y+\varepsilon)^n < x \tag{4}$$

To bude spor s 1. vlastností suprema, neboť by to znamenalo $y + \varepsilon \in M$, a zároveň $y + \varepsilon > y = \sup M$. Upravujeme

$$(y+\varepsilon) = y\left(1 + \frac{\varepsilon}{y}\right) \leq \frac{y}{1 - \frac{\varepsilon}{y}}$$

Zde jsme použili nerovnost (3), přičemž $\varepsilon > 0$ předpokládáme tak malé, že $a = \varepsilon/y \in (0,1)$. Tedy umocněním dostaneme

$$(y+\varepsilon)^n \leq \frac{y^n}{(1-\frac{\varepsilon}{y})^n} \leq \frac{y^n}{1 - n\frac{\varepsilon}{y}}$$

Zde jsme použili Bernoulliho nerovnost, ovšem v převráceném tvaru $1/(1+a)^n \leq 1/(1+na)$, opět pro $a = \varepsilon/y$. Vidíme, že aby platilo (4), stačí zaručit

$$\frac{y^n}{1 - n\frac{\varepsilon}{y}} < x$$

což je ekvivalentní

$$\varepsilon < \frac{x - y^n}{nx/y}$$

a takové $\varepsilon > 0$ jistě existuje, neboť zlomek napravo je v dané situaci kladný.

Předpokládejme nyní naopak, že $y^n > x$. Ukážeme, že pro $\varepsilon > 0$ dost malé je

$$(y - \varepsilon)^n > x \tag{5}$$

Z toho však vyplývá, že každé $z \in M$ splňuje $z \leq y - \varepsilon$. (Neboť opačná nerovnost $z > y - \varepsilon$ implikuje $z^n > (y - \varepsilon)^n > x$, a tedy $z \notin M$.) To by však byl spor s 2. vlastností suprema: $y - \varepsilon$ by byl horní odhad M, a přitom $y - \varepsilon < y$, kde $y = \sup M$ je nejmenší horní odhad M. Volme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $y - \varepsilon > 0$ a dále $\varepsilon/y \in (0, 1)$. Pomocí Bernoulliho nerovnosti pak je

$$(y - \varepsilon)^n = y^n(1 - \frac{\varepsilon}{y})^n \geq y^n(1 - n\frac{\varepsilon}{y})$$

Tedy chceme-li mít (5), stačí zaručit

$$y^n(1 - n\frac{\varepsilon}{y}) > x$$

což je ekvivalentní

$$\varepsilon < \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$$

Zlomek vpravo je zde opět kladný, tedy takové $\varepsilon > 0$ lze jistě najít.