Př: $f(x) = x + 2 + \frac{3}{|x+1|}$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

..... spojitá všude v $\mathcal{D}(f)$

..... symetrie, omezenost NE

$f(+\infty-) = +\infty$ ....

$f(-\infty+) = -\infty$ ... dle VoAL, neb $|x+1| = x+1,\ x > -1$

$= -x-1,\ x < -1$

$f(-1 \pm 0) = +\infty$ ... VoAL & typ $\frac{1}{0+}$

$f'(x) = 1 - \frac{3}{|x+1|^2} \cdot |x+1|' = 1 - \frac{3 \cdot \operatorname{sgn}(x+1)}{(x+1)^2}$ ..

$(x \neq -1)$

nebot' $|y|' = \operatorname{sgn}(y)$ pro $\forall y \neq 0$

$|y|^2 = y^2$ pro $\forall y \in \mathbb{R}$

znaménko $f'(x)$ : $\alpha)$ $x < -1$ ... $f'(x) = 1 + \frac{3}{(x+1)^2} > 0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ roste v $(-\infty, -1)$

$\beta)$ $x > -1$ ... $f'(x) = 1 - \frac{3}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 3$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$

... pouze $x_2 = \sqrt{3} - 1 \doteq 0{,}7 > -1$

zjevně $f'(x) < 0$ pro $x \in (-1, x_2) \Rightarrow f(x)$ klesá v $(-1, x_2]$

$f'(x) > 0$ —"— $(x_2, +\infty)$ —"— roste v $[x_2, +\infty)$

$\Rightarrow$ $x_2$ je ostré lokální min.

$f((-\infty, -1)) = \mathbb{R}$ .... nebot': spojitý obraz intervalu je interval & fce má limity $\pm\infty$ na kraji

$\Rightarrow \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, $\nexists$ globální extrémy

**křivost:** α) $x<-1$: $f'(x)=1+\frac{3}{(x+1)^2}$ … roste, neboť jmen. $>0$ a klesá

$\Rightarrow f(x)$ je ryze konvexní v $(-\infty,-1)$

β) $x>-1$: $f'(x)=1-\frac{3}{(x+1)^2}$ … roste

$\Rightarrow f(x)$ ryze konvexní v $(-1,+\infty)$

**asymptota:** zřejmě $\frac{1}{(x+1)^2}\to 0,\ x\to\pm\infty$ dle VoAL

$\Rightarrow p(x)=x+2$ je asymptota pro $x\to+\infty$

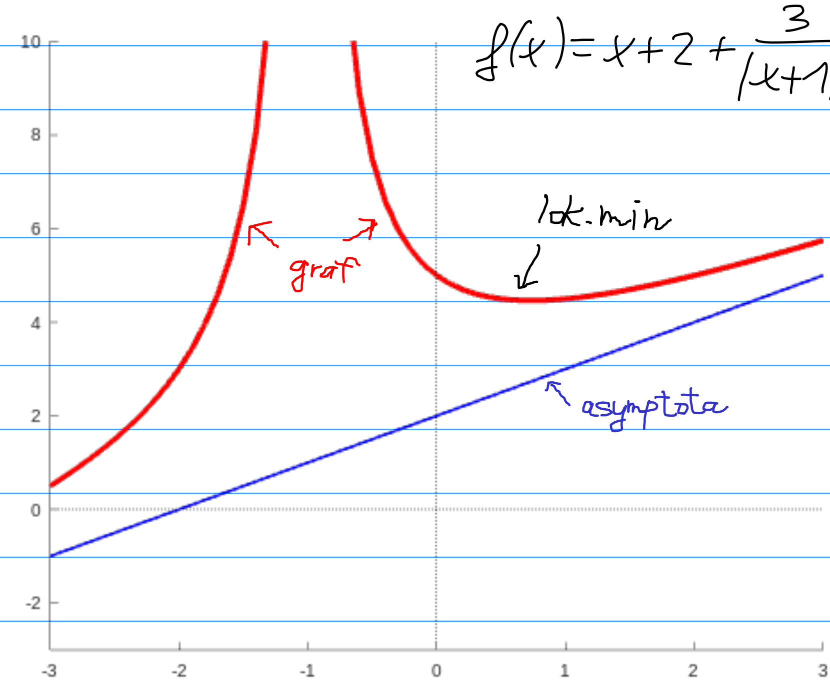
a též pro $x\to-\infty$

… dále $f(x)>p(x)\ \forall x\neq 1$

$\Rightarrow$ asymptota vždy pod grafem

**Pozn.:** výpočet $f''(x)$ zde zbytečný (monotonie $f'(x)$ zřejmá)

$f(x)=x+2+\frac{3}{|x+1|}$



lichá (složení lichých fcí)

Př: $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$ ... spojitá v $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, neboť:

$\arcsin y$ ... spojitá v $[-1,1]$

$\frac{2x}{x^2+1}$ ... spojitá v $\mathbb{R}$ (podíl polynomů, jmenovatel $\neq 0$)

omezená $\Leftarrow |\arcsin y| \leq \frac{\pi}{2}$

$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1 \Leftarrow$ Youngova nerovn.

$|2ab| \leq a^2+b^2$

pro: $a=x$, $b=1$

$f(\pm\infty\mp) = 0$

... VoLSF ...

vnitřní $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{x}} \to 0$ VoAL

vnější: $\arcsin y$ ... spojitá v $y=0$

**derivace:** $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $\forall y \in (-1,1)$

$$\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

navíc $\frac{2x}{x^2+1} \in (-1,1)$ $\forall x \neq \pm 1$

$\Rightarrow \forall x \neq \pm 1$:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}}}_{(*)} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$(*) = \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2 - 4x^2}} = \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}} = \frac{x^2+1}{|x^2-1|}$$

neboť $\sqrt{y^2} = |y| = y \cdot \operatorname{sgn}(y)$

tedy celkem: $f'(x) = \frac{-2\operatorname{sgn}(x^2-1)}{x^2+1}$, $\forall x \neq \pm 1$

body $x = \pm 1$: ... $f(x)$ zde spojitá

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{-2}{x^2+1} = -1$$

neboť $\operatorname{sgn}(x^2-1) = +1$ na $\mathcal{P}_+(1)$

$\operatorname{sgn}(x^2-1) = -1$ na $\mathcal{P}_-(1)$

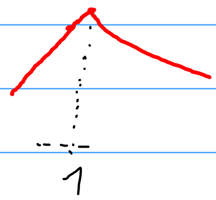
analogicky: $f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1-} \frac{2}{x^2+1} = 1$

$\Rightarrow$ $\left(f(1)=\frac{\pi}{2}\right)$

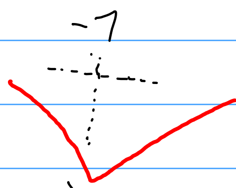
bod $x=1$ je „hrot":

a ostré lok. max

$\nexists f'(1)$




podobně nebo ze symetrie:



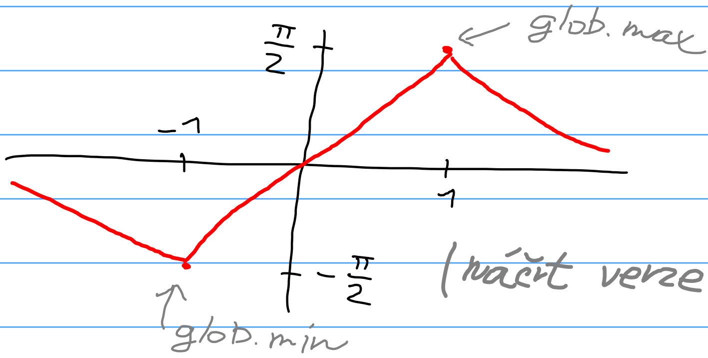

**monotonie:** znaménko $f'(x)$ = znaménko $(1-x^2)$

$f'(x) < 0$ v $(-\infty,-1)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ klesá v $(-\infty,-1]$

$> 0$ $(-1,1)$ roste $[-1,1]$

$< 0$ $(1,+\infty)$ klesá $[1,+\infty)$

$\mathcal{H}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$




(náčrt verze 1)

**křivost:** $(\alpha)$ $x>1$: $f'(x) = \frac{-2}{x^2+1}$ ... roste, neboť $(x^2+1)$ roste a je $>0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ je ryze konvexní v $[1,+\infty)$

$(\beta)$ $x \in (-1,1)$: $f'(x) = \frac{2}{x^2+1}$ ...

$$f''(x) = \frac{-2}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

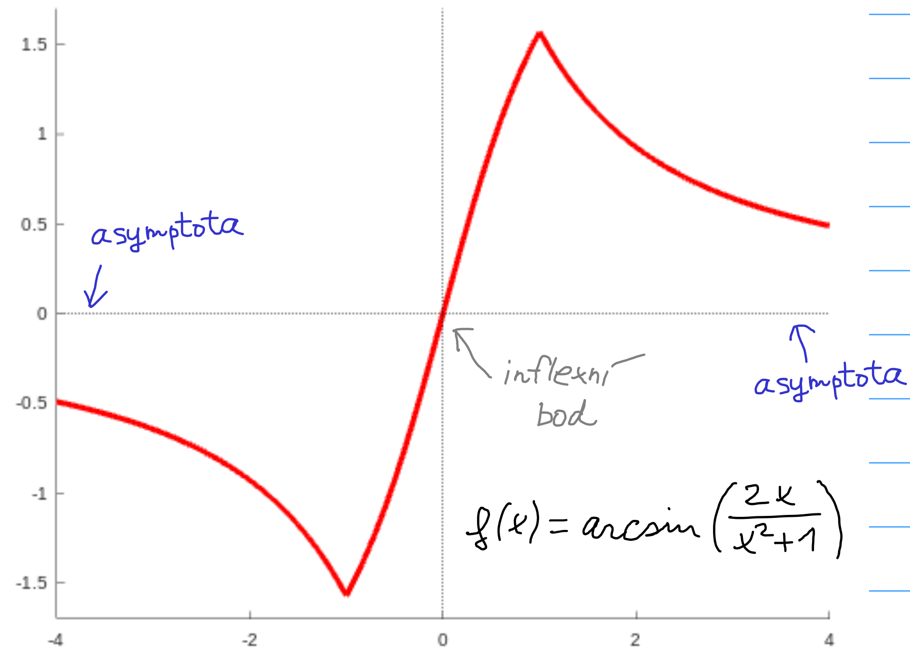
$x \in (-1,0)$: $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ ryze konvexní v $[-1,0]$

$x \in (0,1)$: $< 0$ konkávní $[0,1]$

$x = 0$: inflexní bod

$(\gamma)$ $x < 1$: podobně či ze symetrie

$\Rightarrow$ ryze konkávní v $(-\infty,-1]$




**Poznámky:**

1. $f(x)$ ryze konkávní v $[0,1]$
   -"- konvexní v $[1,+\infty)$, leč $x=1$ NENÍ inflexní bod ($\nexists f'(1)$)

2. lichost $\Rightarrow$ lze se omezit na $x \geq 1$,
   raději však na $(-\delta,+\infty)$, $\delta>0$ malé

3. osa $x$ je asymptotou pro $x \to \pm\infty$

složení polynomu, $\sqrt[3]{y}$ ... spojitá v $\mathbb{R}$

**Př:** $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-6)}$ .... spojitá v $D(f)=\mathbb{R}$

.... $f(\pm\infty\mp)=\pm\infty$, neboť

$x^2(x-6)=x^3\left(1-\frac{6}{x}\right)\to\pm\infty$ dle VoAL

a dále VoLSF, vnější funkce

$\sqrt[3]{y}\to\pm\infty$, $y\to\pm\infty$

$\Rightarrow$ $f(x)$ shora i zdola neomezená

$H(f)=\mathbb{R}$ .... neboť spojitý obraz intervalu je interval & užiji neomezenost

symetrie: NE, nulové body: $x=0$ a $6$.

**derivace:** $\sqrt[3]{y}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$, $y\neq 0$

$\Rightarrow$ $x\neq 0, 2$ : $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4(x-6)^2}}\cdot\underbrace{(x^3-6x^2)'}_{=3x(x-4)}$

$$f'(x)=\frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}$$

neboť: $\sqrt[3]{x^4}=x\sqrt[3]{x}$

$x=0$: $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}_{P_1}\cdot\underbrace{\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{(x-6)^2}}}_{P_2}=-\infty$

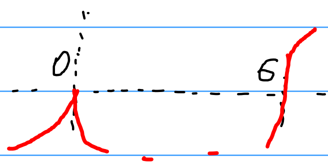
$f'_-(0)=+\infty$

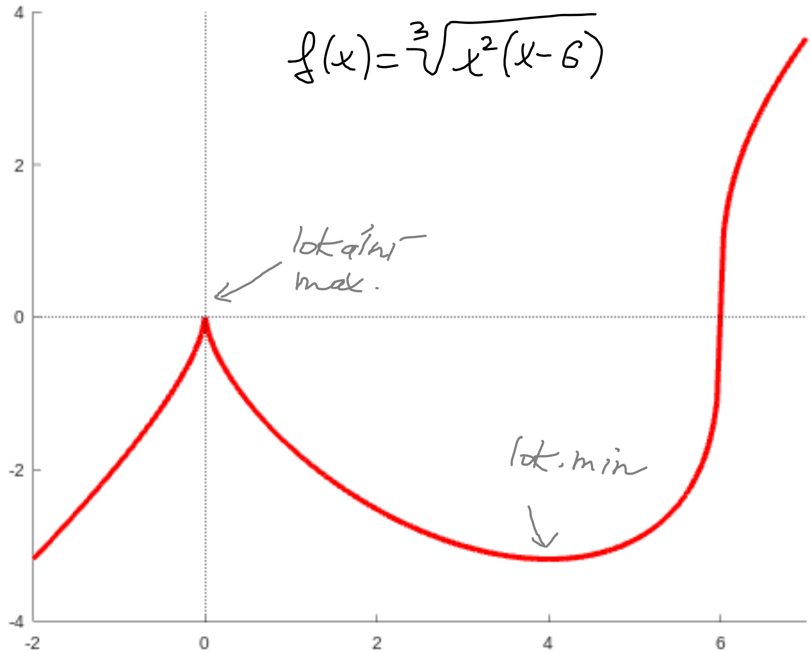
(analogicky)

$P_1\to+\infty$ (typ $\frac{1}{0+}$)

$P_2\to\dfrac{-4}{\sqrt[3]{36}}<0$ ... VoAL & spojitost $\sqrt[3]{y}$

$x=6$: $f'_\pm(6)=f'(6)=+\infty$






**monotonie:** pro $x \neq 0$ a $6$ ... znaménko $f'(x) =$ znaménko $\frac{x-4}{\sqrt[3]{x}}$

$x<0$: $f'(x)>0 \Rightarrow$ $f(x)$ roste v $(-\infty,0]$

$x\in(0,4)$: $<$ klesá v $[0,4]$

$x\in(4,6)$ $>$ roste v $[4,6]$ navíc spojitá

$x>6$ : $>$ —"— v $[6,+\infty)$ v bodě $x=6$

$\Rightarrow$ roste v $[4,+\infty)$

$x=0$ : ostré lok. max

$x=6$ : —"— —"— min

$\nexists$ globální extrémy ($\Leftarrow$ neomezenost)

**křivost:** $x\neq 0,6$ :

$$f''(x)=\left(\frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}\right)'=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x(x-6)^2}\right)^2}\cdot\left[\sqrt[3]{x(x-6)^2}-(x-4)\underbrace{\left(\sqrt[3]{x(x-6)^2}\right)'}_{(*)}\right]$$

$$(*)=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x(x-6)^2}\right)^2}\cdot\left[x(x-6)^2\right]'=\frac{1}{(\quad)^2}\cdot\underbrace{\left[(x-6)^2+2x(x-6)\right]}_{(x-6)(3x-6)}$$

užíváme: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ atd.

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x(x-6)^2}\right)^4}\left[\underbrace{\sqrt[3]{x^3(x-6)^6}}_{x(x-6)^2} - (x-2)(x-4)(x-6)\right]$$

$$= \frac{1}{\underbrace{(\quad)^4}_{>0}}\cdot\left[(x-6)\cdot\underbrace{\left(x(x-6)-(x-2)(x-4)\right)}_{=x^2-6x-(x^2-6x+8)=-8 \;<0}\right]$$

CELKEM: $x \neq 0,6 \Rightarrow f''(x) \gtrless 0 \Leftrightarrow 6-x \gtrless 0$

$x<0$: $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ ryze konvexní v $(-\infty,0]$
$x\in(0,6)$ $\quad >0$ $\quad$ — " — v $[0,6]$
$x>6$ $\quad <0$ $\quad$ ryze konkávní v $[6,+\infty)$

POZOR: $f(x)$ není konvexní v $(-\infty,0]\cup[0,6)$
... neboť $\nexists f'(0)$
$x=6$ je inflexní, neboť $\exists f'(6)=+\infty$
(ovšem $f''(6)$ nemá smysl)

**asymptoty:** $\frac{f(x)}{x} = \sqrt[3]{1-\frac{6}{x^2}} \to 1$, $x\to\pm\infty$

$$f(x)-x = \sqrt[3]{x^3-6x^2}-x = \frac{-6x^2}{\left(\sqrt[3]{\dots}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\phantom{x}}\right)\cdot x + x^2}$$

$$= \frac{-6}{\sqrt[3]{(1+\dots)^2}+\sqrt[3]{1+\dots}+1} \to -\frac{6}{3}$$

.... dle VoAL
a spojit. $\sqrt[3]{y}$

$\Rightarrow p(x) = x-2$ je asymptota
pro $x\to\pm\infty$

**Př.** $f(x) = 2\underbrace{|\sin x|}_{P_1} + \underbrace{|\cos 2x|}_{P_2} \ldots$

sudá (součet sudých)
$\geq 0$, shora omez. $\leq 3$
spojitá v $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

π-periodická, neboť: $\overset{(\cos)}{\sin}(y+\pi) = -\overset{(\cos)}{\sin}\, y$

$P_1 \ldots \pi$-periodická

$P_2 \ldots \frac{\pi}{2}$ – – " –

**derivace:** $|y|' = \mathrm{sgn}(y), \quad y \neq 0$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot \mathrm{sgn}(\sin x) \cdot \underbrace{(\sin x)'}_{=\cos x} + \mathrm{sgn}(\cos 2x) \cdot \underbrace{(\cos 2x)'}_{=-2\underbrace{\sin 2x}_{2\sin x \cos x}}$$

$$f'(x) = 2\cos x \cdot \left[\mathrm{sgn}(\sin x) - 2 \cdot \mathrm{sgn}(\cos 2x) \cdot \sin x\right]$$

pokud $\sin x \neq 0$, tj. $x \neq k\pi$
a $\cos 2x \neq 0$, tj. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

OMEZÍME SE NADÁLE
JEN NA $x \in [0, \pi]$
(stačí díky periodě)

$$f(x) = \sin x + |\cos 2x| \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$f'(x) = 2\cos x \left[1 - 2\,\mathrm{sgn}(\cos 2x) \cdot \sin x\right]$$

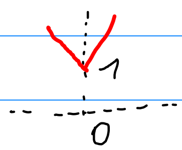
$$\forall x \in \left(0, \tfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\tfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$$

výjimečné body:

neboť $\cos 2x > 0$ na $\mathcal{P}_+(0)$

$x = 0$: $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0+} 2\cos x\left[1 - 2\sin x\right] = 2$

sudá fce: $f'_-(0) = -2$



$\cos 2x > 0$ na $P_-(\frac{\pi}{4})$

$x = \frac{\pi}{4}$: $\quad f'_-(\frac{\pi}{4}) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-} f'(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-} 2\cos x\,[1-2\sin x]$

$$= 2\cdot\cos\tfrac{\pi}{4}\cdot\left[1-2\sin\tfrac{\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\,(1-\sqrt{2}) \doteq -0.58$$

$$f'_+(\tfrac{\pi}{2}) = \sqrt{2}\,(1+\sqrt{2}) \doteq 3.41$$

… podobně, neb $\cos 2x < 0$ na $P_+(\frac{\pi}{4})$

$x = \frac{\pi}{2}$: $\quad f'_\pm(\frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm} \underbrace{2\cos x}_{\to 0}\,\underbrace{[1-2\,\mathrm{sgn}(\cos 2x)\cdot\sin x]}_{\text{omezená na } P(\frac{\pi}{2})} = 0$

$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, zatímco $\nexists\, f'(0), f'(\frac{\pi}{4})$

$x = \frac{3\pi}{4}$: $\quad f'_\pm(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2}) \doteq -3.41$ … podobně či ze symetrie vůči ose $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1) \doteq 0.58$$

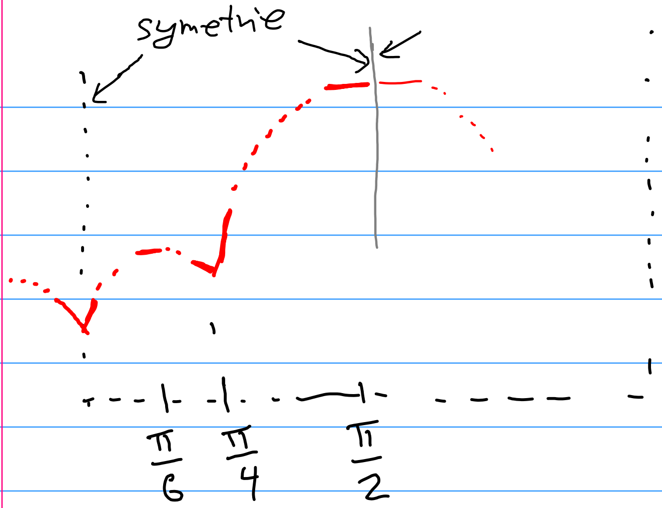
**znaménko $f'(x)$** … řešme $f'(x) = 0$, stačí jen pro (α) $x \in (0, \frac{\pi}{4})$
(β) $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

(α) $x \in (0, \frac{\pi}{4})$: $\quad f'(x) = 2\cdot\underbrace{\cos x}_{>0}\,(\underbrace{1-2\sin x}_{=0 \iff \sin x = \frac{1}{2}})$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

(β) $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$: $\quad f'(x) = 2\cdot\underbrace{\cos x}_{>0}\cdot(1+2\underbrace{\sin x}_{>0}) > 0$

celkem: $f'(x) > 0$ v $(0, \frac{\pi}{6})$ $\Rightarrow f(x)$ roste v $[0, \frac{\pi}{6}]$
$f'(x) < 0$ $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ klesá $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$
$f'(x) > 0$ $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ roste $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$




dále spočtu:

$f(0) = 1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \doteq 1.41$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

$\Rightarrow \quad H(f) = [1,3]$

$x = 0 + 2\pi \cdots$ glob. min.

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdots$ glob. max.

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdots$ lok. max.

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdots$ lok. min.

**křivost:** stačí opět pro ($\alpha$) $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ a ($\beta$) $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

($\alpha$) $x \in (0, \frac{\pi}{4})$:

$$f'(x) = 2\cos x(1 - 2\sin x)$$

$$f''(x) = -2\sin x(1 - 2\sin x) + 2\cos x(-2\cos x)$$

$$= 4\sin^2 x - 2\sin x - 2\underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x}$$

$$f''(x) = 8\sin^2 x - 2\sin x - 4$$

označ $z = \sin x$; tj. $f''(x) = 0 \iff 8z^2 - 2z - 4 = 0$

$$z = \frac{1}{8}(1 \pm \sqrt{33})$$

$$z \doteq 0.84 \text{ nebo } -0.59$$

leč $\sin x \in [0, 0.71]$

$\Rightarrow \quad f''(x) < 0$ na $(0, \frac{\pi}{4})$

$f(x)$ ryze konkávní v $[0, \frac{\pi}{4}]$

($\beta$) $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$:

$$f'(x) = 2\cos x(1 + 2\sin x)$$

$$f''(x) = -2\sin x(1 + 2\sin x) + 2\cos x(2\cos x)$$

$$= -8\sin^2 x - 2\sin x + 4$$

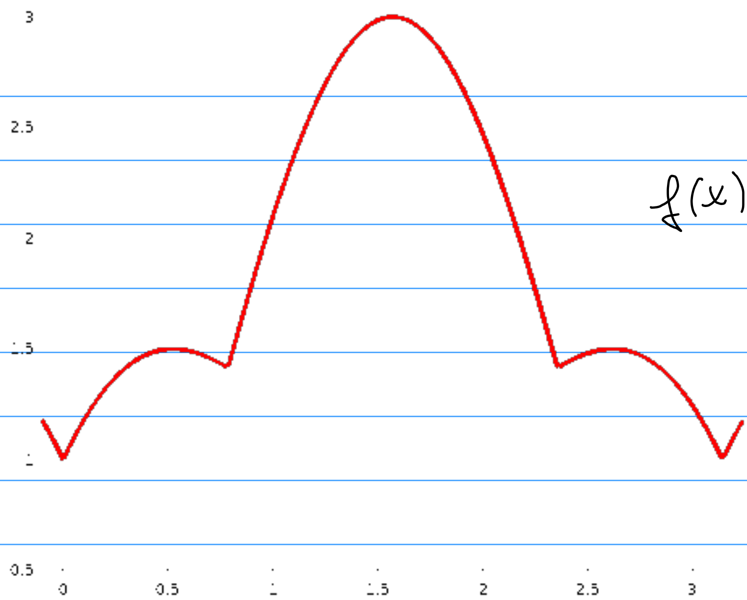
opět polož $z = \sin x$ .... $-8z^2 - 2z + 4 = 0$

$$z = \frac{1}{8}(-1 \pm \sqrt{3}) \doteq 0.59 \text{ nebo } -0.84$$

leč $\sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.71$

$\Rightarrow \quad f''(x) < 0$ na $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

$f(x)$ ryze konkávní v $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$




$f(x) = 2|\sin x| + |\cos 2x|$

$f'(\frac{\pi}{2})$ ∄

ANO v $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

**Pozn.** ① $f(x)$ ryze konk. v $\underbrace{[0, \frac{\pi}{4}], [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]}$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$, ...

NE v $[0, \frac{\pi}{2}]$

neboť $\nexists\, f'(\frac{\pi}{4})$

② $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ ... opět příklady extrémů, kde není $f'(x) = 0$ (neboť $f'$ zde ∄)

③ $\nexists \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$, a tedy ∄ asymptoty

Dk. ?? $f(x) \to L$, $x \to +\infty$

... Heineho věta $f(\pi n) = 1 \to L$, tj. $L = 1$

leč též $f(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 3 \to L$, tedy $L = 3$

SPOR

**Př.** $f(x) = \begin{cases} 4\exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right) & , x \neq 2 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}$

.. spojitá v $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

(i) v bodech $x_0 \neq 2$: složení fcí

$x \longmapsto \underbrace{\frac{x}{x-2}}_{\text{spojité mimo } x_0=2}$ a dále $\underbrace{|y|, e^{-y}}_{\text{spojité } \mathbb{R}\to\mathbb{R}}$

(ii) v bodě $x_0 = 2$: ověříme, že

$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$x \in \mathcal{P}(2) \Rightarrow f(x) = 4 \cdot \exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right) \to 0, \ x \to 2$

neboť: $\frac{1}{|x-2|} \to +\infty$ (typ $\frac{1}{0+}$)

$-\left|\frac{x}{x-2}\right| = -|x| \cdot \frac{1}{|x-2|} \to -\infty$

dle VoAL

a tedy $f(x) \to 0$ díky VoLSF, vnější fce $e^{y}$

dále: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{4}{e}$, neboť $\frac{x}{x-2} = \frac{1}{1-\frac{2}{x}} \to 1$

díky VoAL

a dále VoLSF, vnější fce $e^{-|y|}$

symetrie, perioda: $\emptyset$

zřejmě $0 \leq f(x) \leq 4$

neboť $e^{y} \in (0,1]$ pro $y \leq 0$

**derivace:** problémové body: $\begin{cases} x = 0 & (0 \text{ v } |\cdot|) \\ x = 2 & \text{..(změna definice)} \end{cases}$

$x \neq 0, 2$: $f'(x) = 4 \cdot \exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right) \cdot \left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)'$

$$\left|\frac{x}{x-2}\right|' = \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x}{x-2}\right)' = \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right) \cdot \frac{-2}{(x-2)^2}$$

CELKEM: $f'(x) = 8\cdot \exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)\cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}$

pro $x \neq 0{,}2$

$x=0$: $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = -2$

neboť: $x \in P_+(0,\delta) \Rightarrow \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right) = -1$

$$f'(x) = \frac{-8}{(x-2)^2}\exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right) \to -\frac{8}{2^2}$$

dle VoAL & VoLSF, jako výše

$f'_-(0) = +2$

... analogicky

$\Rightarrow \nexists\, f'(0)$

$x=2$: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 2} f'(x) = 0$, neboť $\exp(-|\cdot|) \to 0$ je silnější než $\frac{1}{(x-2)^2} \to +\infty$

podrobněji: $x \in P(2,\delta) \Rightarrow f'(x) = \underbrace{8\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right)}_{\text{omezená}}\cdot\underbrace{g(x)}_{\to 0\,?}$

$$g(x) = \exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)\cdot\frac{1}{|x-2|^2} = \underbrace{\frac{\left|\frac{x}{x-2}\right|^2}{\exp\left(\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)}}_{P_1 \to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{|x|^2}}_{\to \frac{1}{|2|^2}} \to 0,\ x\to 2$$

$P_1$: VoLSF .... vnitřní: $\left|\frac{x}{x-2}\right| \to +\infty$, $x \to 2$ (viz výše)

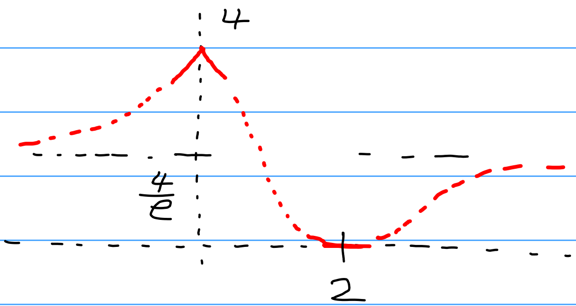
vnější: $\frac{y^2}{e^y} \to 0$, $y \to +\infty$ ... růstové škály (2x l'Hosp. „$\frac{\infty}{\infty}$")

**monotonie:** $x \neq 0{,}2 \Rightarrow \operatorname{sgn} f'(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x-2}\right)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x<0$: | $f'(x) > 0$ | $\Rightarrow$ | $f(x)$ roste v | $(-\infty, 0]$ |
| $x\in(0,2)$ | $<$ | | klesá | $[0,2]$ |
| $x>2$ | $>$ | | roste | $[2,+\infty)$ |

$f(0)=4$ glob. max.

$\Rightarrow f(2)=0$ -"- min.




$\mathcal{H}(f)=[0,4]$

$\subseteq$ ... již víme

$\supseteq$ ... $\mathcal{H}(f)\supseteq f([0,2])\supseteq[0,4]$

↑ interval (spojitost), obsahující $f(0)=4$ a $f(2)=0$

**křivost:** (i) $x<0$: $f'(x)=\frac{8}{(x-2)^2}\cdot \exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)$

$=\frac{2}{(x-2)^2} f(x)$ ... roste (součin kladných, rostoucích fcí)

(ii) $x\in(0,2)$: $f'(x)=\frac{-8}{(x-2)^2}\cdot\exp\left(-\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)=\frac{-2}{(x-2)^2}\cdot f(x)$

$$f''(x)=\frac{+4}{(x-2)^3}f(x)-\frac{2}{(x-2)^2}f'(x)=\left[\frac{4}{(x-2)^3}+\left(\frac{-2}{(x-2)^2}\right)^2\right]f(x)$$

$$=\underbrace{\frac{4\cdot f(x)}{(x-2)^4}}_{>0}\cdot\underbrace{\left[x-2+1\right]}_{=x-1}\ \substack{<\\>}\ 0$$ pro $x\in(0,1)$ resp. $x\in(1,2)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ryze konkávní v $[0,1]$, konvexní $[1,2]$

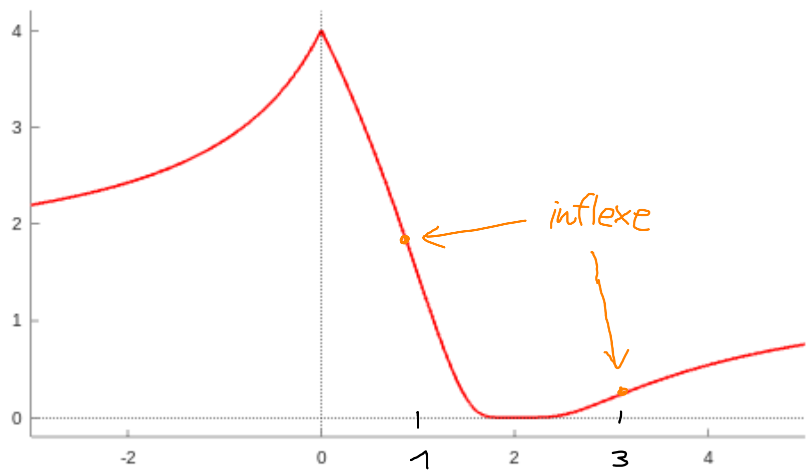
$x=1$ inflexní bod

(iii) $x>2$: $f'(x)=\frac{2}{(x-2)^2}f(x)$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-4}{(x-2)^3}f(x)+\frac{2}{(x-2)^2}f'(x)=\frac{4f(x)}{(x-2)^4}\underbrace{\left[-(x-2)+1\right]}_{-x+3\ \dots}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ryze konvexní v $[2,3]$, konkávní $[3,+\infty)$

$x=3$ inflexní bod


inflexe
4
3
2
1
0
-2
0
1
2
3
4