A1) Záměnou limity a integrálu vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt[n]{\frac{\sin x}{x^n}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$$

$$0 < f_n(x) = \frac{\sqrt[n]{\sin x}}{x} \nearrow \frac{1}{x}, \quad \text{neboť } \sqrt[n]{\sin x} = e^{\overbrace{\frac{1}{n}\underbrace{\log(\sin x)}_{<0}}^{\to 0,\ \text{roste}}}$$

pro $x \in (0,1)$

Leviho věta $\Rightarrow$ záměna

A2) Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{\operatorname{arctg} x}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

ad I_1: $f(x)$ spojitá na $(0,1]$, $f(x) \sim x^{a-1}$ pro $x \to 0+$ $\Rightarrow$ I_1 konv. $\Leftrightarrow$ $\int_0^1 x^{a-1}\,dx$ konv.

tj. pro $a-1 > -1$, $a > 0$

ad I_2: $f(x)$ spojitá na $[1,+\infty)$, $f(x) \sim x^a$, $x \to +\infty$ $\Rightarrow$ $I_2 < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} x^a\,dx < +\infty$

tj. pro $a < -1$

CELKEM: nekonverguje nikdy

B1) Záměnou limity a integrálu vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n(1+x^2)x}\,dx = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0$$

neboť $|f_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{|\sin(nx)|}{nx} \le \frac{1}{nx} \to 0$, $n \to \infty$, $x > 0$ pevné

záměna $\Leftarrow$ Lebesgueova věta:

majoranta $g(x) = \frac{1}{1+x^2} \in L(0,+\infty)$

díky odhadu $\left|\frac{\sin y}{y}\right| \le 1$ pro $\forall y \neq 0$

B2) Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin x}{\log^a(1+x)}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2$$

v závislosti na parametru $a > 0$.

ad I_1: $f(x)$ spojitá na $(0,1]$, $f(x) \sim x^{1-a}$ pro $x \to 0+$ $\Rightarrow$ $I_1 < +\infty$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x^{1-a}\,dx < +\infty$

tj. $1-a > -1$

$a < 2$

ad I_2: $\log^a(1+x) \geq \log^a 2$ pro $x > 1$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{e^{-x}\cdot|\sin x|}{\log^a 2} \leq c \cdot e^{-x}$$

$\Rightarrow$ $I_2 < +\infty$ pro $\forall a > 0$

CELKEM: konverguje pro (kladná) $a < 2$.