1. Integrandy

Řekneme, že $F : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňuje Carathéodoryovy podmínky CAR, jestliže

- pro všechna $\zeta \in \mathbb{R}^d$ je $F(\cdot, \zeta)$ měřitelná na Ω,
- pro skoro všechna $x \in \Omega$ je $F(x, \cdot)$ spojitá na $\mathbb{R}^d$.

Věta 1.1. *Nechť $F : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňuje CAR. Potom pro každou $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$ měřitelnou je $x \mapsto F(x, u(x))$ měřitelná.*

Důkaz. Pro v jednoduchou je to snadné. Obecná měřitelná funkce je limitou jednoduchých. □

Lemma 1.2. *Nechť f, g, f_k, $g_k \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $f_k \to f$ s.v., $g_k \to g$ v L^p a $|f_k| \le |g_k|$. Potom*

$$f_k \to f \quad v\ L^p.$$

Důkaz. Máme

$$|f_k - f| \le |f_k| + |f| \le |g_k| + |g| \le |g_k - g| + 2|g|.$$

Nechť $E_k = \{x : |g_k(x) - g(x)| \le |g(x)|\}$. Na množině E_k je

$$|f_k - f| \le |g_k - g| + 2|g| \le 3|g|,$$

na množině $\Omega \setminus E_k$ je

$$|f_k - f| \le |g_k - g| + 2|g| \le 3|g_k - g|.$$

Tedy

$$\int_\Omega |f_k - f|^p\,dx \le \int_\Omega |f_k - f|^p \chi_{E_k}\,dx + 3^p \int_\Omega |g_k - g|^p\,dx.$$

První z integrálů na pravé straně jde k nule z Lebesgueovy věty (majoranta $3^p|g|^p$), druhý jde k nule z předpokladů. □

Věta 1.3. *Nechť $F : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňuje CAR a*

$$|F(x, \zeta)| \le f(x) + C|\zeta|^p, \tag{1}$$

kde $f \in L^p$ a $C \in \mathbb{R}$. Potom

$$u \mapsto \int_\Omega F(x, u(x))\,dx$$

je spojitý funkcionál na $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Důkaz. Nechť $u_k \to u$ v $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Potom můžeme předpokládat, že $u_k \to u$ s.v., jinak přejdeme k podposloupnosti. Máme

$$|F(\cdot, u_k)| \le f + |u_k|^p \le f + 2^p(|u|^p + |u - u_k|^p)$$

a pravá strana konverguje v L^1 k $f + 2^p|u|^p$. Podle lemmatu (1.2) máme konvergenci $F(\cdot, u_k) \to F(\cdot, u)$ v L^1. □