

DŮ 5

TERMIN: více než 17. 12.

Spolu

1. Ukažte, že systém

$$x' = -x^3, \quad y' = -y$$

má centrální varietu $\phi(x) = 0$. Ukažte, že

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-1/2x^2), & x > 0 \end{cases}$$

je také centrální varieta. Nalezněte další centrální variety.

2. Ukažte, že (žádná) centrální varieta systému

$$x' = -x^3, \quad y' = -y + x^2$$

není analytická v okolí 0.

7. Vyšetřete stabilitu počátku pro systém

$$x' = e^{2xy} - e^{x^3}, \quad y' = e^{x^2} - e^{2y}.$$

8. Vyšetřete stabilitu počátku pro systém

$$x' = y \sin x + x \sin y, \quad y' = \ln(1 - y) + \sin x^2.$$

Příklad 3. Vyšetřete stabilitu počátku pro soustavu

$$\begin{aligned} x' &= x(y - z) \\ y' &= -2y + z + \cancel{x^2} - \cancel{z^2} \quad (x^2 - z^2) \\ z' &= y - 3z + xyz \end{aligned}$$

12. Uvažujte systém

$$x' = yv$$

$$y' = yu$$

$$u' = -u + x^2 + 2xy^3$$

$$v' = -v + y^2 + 2x^2y^2$$

Ukažte, že existuje centrální varieta tvaru $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Aproximujte ji vhodnou kvadratickou funkcí. Vyšetřete stabilitu počátku pro původní systém.

3. příklad [7b] Ukažte ověřením předpokladů příslušné věty, že soustava

$$x' = -x^3 + 3xy^2z$$

$$y' = -y^3 - 2x^2yz$$

$$z' = -z + 10(x^2 + y^2)$$

má v okolí počátku centrální varietu tvaru $z = \phi(x, y)$. Nalezněte její aproximaci řádu alespoň dva. Vyšetřete (asymptotickou) stabilitu počátku redukované i původní soustavy.

↑
Nápomoc: Ljapunovská fce $V = x^a + y^b$