DÚ1 TERMÍN: pátek 9. 10.

1. Najděte explicitně řešicí funkci $\varphi(t, x)$ pro rovnice/systémy

~~(i) $x' = x^p$, $p \in \mathbb{R}$ (pro $x > 0$)~~

(ii) $x'' + x = 0$ (přepište jako systém 2. rovnic)

(iii) $x' = x + \ln y$, $y' = -y$ (pro $y > 0$)

Ověřte, že (alespoň lokálně) je splněna vlastnost dynamického systému: $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$.

2. Najděte*) dynamický systém v $\mathbb{R}^2$ tak, že pro vhodný počáteční bod x_0:

(i) $\omega(x_0) = \emptyset$

(ii) $\omega(x_0)$ je jednotková kružnice

(iii) $\omega(x_0)$ je dvoubodová (lze to??)

(iv) $\omega(x_0)$ je přímka

*) obrázek, vzorec, rovnice... ?

3. (Nesouvislá ω-limitní množina) Uvažujte systém rovnic

$$x' = -y(1 - x^2),$$
$$y' = x + y(1 - x^2).$$

Omezte se na svislý pás $|x| < 1$, přičemž:
(i) najděte a analyzujte stacionární body
(ii) identifikujte křivky, kde x' resp. y' mění znamení a načrtněte průběhy řešení
(iii) ukažte, že pro každý bod $x_0 \neq 0$ je $\omega(x_0)$ rovna sjednocení přímek $x = \pm 1$

Nepovinné.

Věta 13.2.[1] Nechť (φ, Ω) je dynamický systém. Potom:

1. $\omega(x_0) = \{z\}$, právě když $\varphi(t, x_0) \to z$, pro $t \to +\infty$
2. obecněji, pro $K \subset \Omega$ kompaktní platí: $\emptyset \neq \omega(x_0) \subset K$, právě když $\operatorname{dist}(\varphi(t, x_0), K) \to 0$ pro $t \to +\infty$.

Dokažte!