Příklady – Sturm-Liouvilleova teorie

1. Najděte vlastní čísla (a příslušné vlastní funkce) úlohy
$$x'' + \lambda x = 0$$
s okrajovými podmínkami
   (i) $x(0) = x(T) = 0$
   (ii) $x'(0) = x'(T) = 0$
   (iii) $x(0) = 0$, $x'(1) + kx(1) = 0$, kde $k > 0$

2. Najděte vlastní čísla a příslušné vlastní funkce úlohy
$$(t^2 x')' + \lambda x = 0$$
s okrajovými podmínkami
   (i) $x(1) = x(e) = 0$
   (ii) $x(1) = x'(e) = 0$

3. Najděte explicitní tvar Greenova jádra $G_0(t, s)$ pro úlohu 1 (pro $\lambda = 0$) s okrajovými podmínkami (i) výše. Ověřte přímým výpočtem, že
$$w(t) = \frac{1}{c} \int_0^T G_0(s, t) h(s)\, ds$$
řeší příslušnou rovnici s pravou stranou, tj. $x'' = h(t)$, $x(0) = x(T) = 0$.

4. Najděte nutnou a postačující podmínku na funkci $f(t)$, aby existovalo řešení úlohy
$$x'' + x = f(t)$$
s okrajovými podmínkami $x(0) = x(\pi) = 0$. Problém řešte:
   (a) přímo, tj. najděte obecné řešení pomocí variace konstant a diskutujte možnost splnění daných okrajových podmínek
   (b) aplikací Lemmatu 17.7 – s přihlédnutím k úloze 1i) výše

*5. Ukažte, že jádro Greenova operátoru (z Lemmatu 17.5.) lze napsat pomocí funkcí u_k (z Věty 17.1.) jako
$$G_\lambda(t, s) = \sum_k \frac{u_k(t) u_k(s)}{\lambda - \lambda_k}$$
V jakém smyslu řada konverguje?

Návody a výsledky.

1. Násobte rovnici x a integrujte per-partes, odtud λ nutně kladné (resp. nezáporné).

   (i) $\sin(k\pi t/T)$, $\lambda = k^2\pi^2/T^2$, $k \geq 1$

   (ii) $\cos(k\pi t/T)$, $\lambda = k^2\pi^2/T^2$, $k \geq 0$

   (iii) $\sin(\omega_k t)$, $\lambda_k = \omega_k^2$, kde ω_k jsou kladná řešení rovnice $\operatorname{tg}\omega = -\omega/k$

2. Bernoulliho rovnice, tj. $x(t) = t^\mu$ je hledaný tvar. Případ (i) vede na řešení $t^{-1/2}\sin(\omega_k \ln t)$, kde $\omega_k = k\pi/\ln 2$, $\lambda_k = \omega_k^2 + 1/4$.

3. Jde v zásadě o provedení důkazů Lemmat 17.4 a 17.5 pro tuto konkrétní úlohu.

4. $\int_0^\pi f(s)\sin(s)\,ds = 0$.

5. Fourierova řada $h(t) = \sum_k \omega_k u_k(t)$.