Ordinary Differential Equations ZS 17/18

Dalibor Pražák, Josef Žabenský 16. října 2017

Problem Set 2

2.1. Perform qualitative analysis to the following equations (especially with respect to uniqueness and possible blow-ups)

(a) $x' = e^x - 1$,

(b) $x' = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

Note: Let $\sqrt[3]{-1} = -1$. Describe here in addition all solutions satisfying $x(0) = 1$.

2.2. Consider a *predator-prey system*

$$x' = x(1-x) - xy,$$
$$y' = -2y + xy,$$

where $x(t)$ represents the number of animals at time t being hunted by a population of $y(t)$ predators

(a) Show that the solutions cannot leave the first quadrant.

(b) Find stationary points and sketch the course of solutions in the first quadrant, using elementary arguments.

(c) What happens for $t \to \pm\infty$?

2.3. Prove the differential forms of the Gronwall lemma (without resorting to the integral one; that is why you have (a) and (b) here to guide you towards (c)): Let $-\infty < a < b < \infty$, $u \in C^1([a,b])$ and assume

$$u'(t) \le \beta(t)u(t) + \alpha(t) \quad \text{for every } t \in [a,b]$$

with functions $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ specified below.

(a) If $\alpha \equiv 0$ and $\beta \in \mathbb{R}$ then

$$u(t) \le u(a)e^{(t-a)\beta} \quad \text{for every } t \in [a,b].$$

Hint: Rewrite the starting inequality in the form $F'(t) \le 0$ for some F.

(b) If $\alpha \equiv 0$ and $\beta \in C([a,b])$ then

$$u(t) \le u(a)e^{\int_a^t \beta(s)\,ds} \quad \text{for every } t \in [a,b].$$

(c) If $\alpha, \beta \in C([a,b])$ then

$$u(t) \le \left(u(a) + \int_a^t \alpha(s)e^{-\int_a^s \beta(r)\,dr}\,ds\right) e^{\int_a^t \beta(s)\,ds} \quad \text{for every } t \in [a,b].$$

Usually the assumptions read only $\alpha, \beta \in L^1(a,b)$ but then one requires in addition that β be non-negative a.e. in (a,b). Why?

2.4. Food for thought: Kurděj has a garden with 100 poisonous flowers that he wants to eradicate. He can destroy exactly 3, 5, 14, or 17 at a time, but if at least one flower survives, then the flowers also grow back based on how many were destroyed (3 die $\to$ 12 grow back, 5 die $\to$ 17 grow back, 14 die $\to$ 8 grow back, 17 die $\to$ 2 grow back). If the number of flowers is exactly 0, then the flowers never grow back. Can Kurděj ever get rid of all the flowers in his garden?

Série 2 - řešení

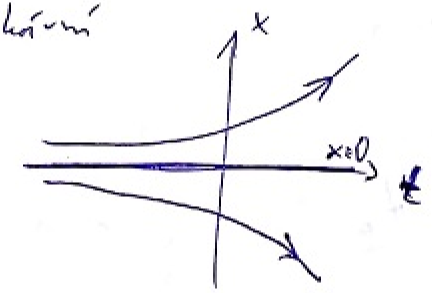
2.1 a) • $f(x) = e^x - 1$ je všude spojitá a lok. lipsch. v x

$\Rightarrow \forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2 \ \exists!$ lok. řešení, že $x(t_0) = x_0$

• $x > 0 \Rightarrow$ rostoucí
$x = 0$ ... stac. řešení
$x < 0 \Rightarrow$ klesající

• $x'' = f_x \cdot f = e^x(e^x - 1)$

$\Rightarrow$ $x > 0 \Rightarrow$ konvexní
$x < 0 \Rightarrow$ konkávní



• pro $t \to -\infty$ musí mít $\forall$ řešení z monotonie a omezenosti vlastní limitu. Z vlastností autonomních rovnic (série 1) víme, že limitou může být jedině hodnota některého stacionárního řešení $\Rightarrow \forall$ řešení x: $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$

Na konstantní řešení se ale nenapojí z jednoznačnosti.

? Co blow-upy

1) řešení splňující $x > 0$:
Buď $x_\alpha > 1$ a t_α takové, že $x(t_\alpha) = x_\alpha$ (to je korektní, protože x je striktně rostoucí a x nabývá všech hodnot z $(0, \infty)$)

Buď navíc t_0 : $x(t_0) = 1$

Podle Barrowova vzorce

$$t_\alpha - t_0 = \int_1^{x_\alpha} \frac{ds}{f(s)} = \underbrace{\int_1^{x_\alpha} \frac{ds}{e^s - 1}}_{\leq c < \infty \text{ pro } x_\alpha \to \infty}$$

(obecná znalost)

$\Rightarrow$ t_α je omezené pro $x_\alpha \to \infty$ $\Rightarrow$ pro $x > 0$ k blow-upu v konečném čase dojde!

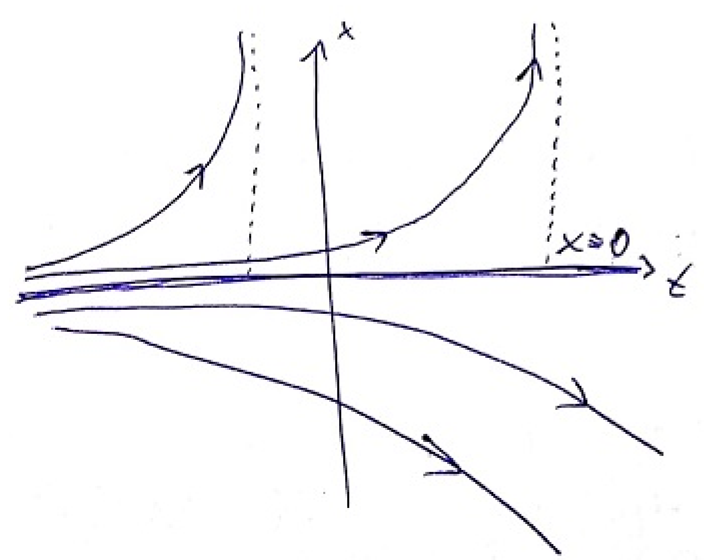
2) řešení splňující $x < 0$: Analogicky buď $x_\alpha < -1$ a $t_\alpha = x^{-1}(x_\alpha)$, $t_0 = x^{-1}(-1)$

Potom

$$t_0 - t_\alpha = \int_{x_\alpha}^{-1} \frac{ds}{e^s - 1} \approx \underbrace{\int_1^{-x_\alpha} e^s \, ds}_{\to \infty \text{ pro } x_\alpha \to -\infty}$$

$\Rightarrow$ t_α je neomezené pro $x_\alpha \to -\infty$ $\Rightarrow$ žádný blowup

$\Rightarrow$

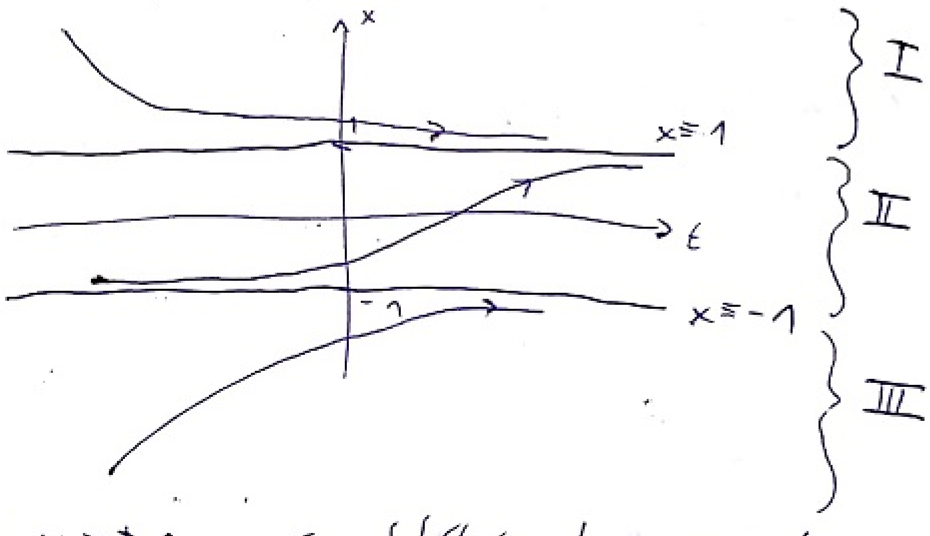


2.1 b

- všude spojitá => oblast existence = $\mathbb{R}^2$
- jednoznačnost: $f_x = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$ ... lok om. pro
  $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$
  (a pochopitelně $\forall t$)

- $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \Rightarrow x$ klesající
  $x \in \{-1\} \cup \{1\} \Rightarrow$ stac řešení
  $x \in (-1,1) \Rightarrow x$ rostoucí

- $x'' = f_x \cdot f = -\frac{2}{3} \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}}$
  $x > 1 \Rightarrow x$ konvexní
  $x \in (0,1) \Rightarrow$ konkávní
  $x = 0$ ... inflexe
  $x \in (-1,0) \Rightarrow$ konvexní
  $x < -1 \Rightarrow$ konkávní



- pro $x = \pm 1$ nemáme lokální jednoznačnost
  => zbývající otázky
  1) dochází v oblasti I v minulosti k blow-upu?
     dochází k napojení řešení na stacionární řešení $x \equiv 1$?
  2) dochází v II k napojení na některé ze dvou stac řešení?
  3) dochází v III v minulosti k (záporném) blow-upu?
     dochází k napojení řešení na stac řešení $x \equiv -1$?

Tyto všechny otázky zodpovíme pomocí Barrowova vzorce:

ad 1) blow-up vzdálenosti: (viz 2.1b) pro detaily) buď $x_\alpha > 2$, $t_0 = x^{-1}(2)$

$$t_0 - t_\alpha = \int_2^{x_\alpha} \frac{ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{3}}} \to -\infty \text{ pro } x_\alpha \to \infty$$

(integrál se chová jako $\int_2^\infty \frac{ds}{x^{\frac{2}{3}}}$)

$\Rightarrow t_\alpha$ neomezené $\Rightarrow$ žádný blow-up

mrznutí na $x \equiv 1$: Buď $x(t_0) = 2$. Dojde řešení hodnoty 1 v konečném čase?

$$t_\alpha - t_0 = \int_2^1 \frac{ds}{(1-s^2)^{\frac{1}{3}}} = \int_1^2 \frac{ds}{(s^2-1)^{\frac{1}{3}}} = \int_1^2 \frac{ds}{(s-1)^{\frac{1}{3}} \cdot (s+1)^{\frac{1}{3}}}$$

omezené na $(1,2)$

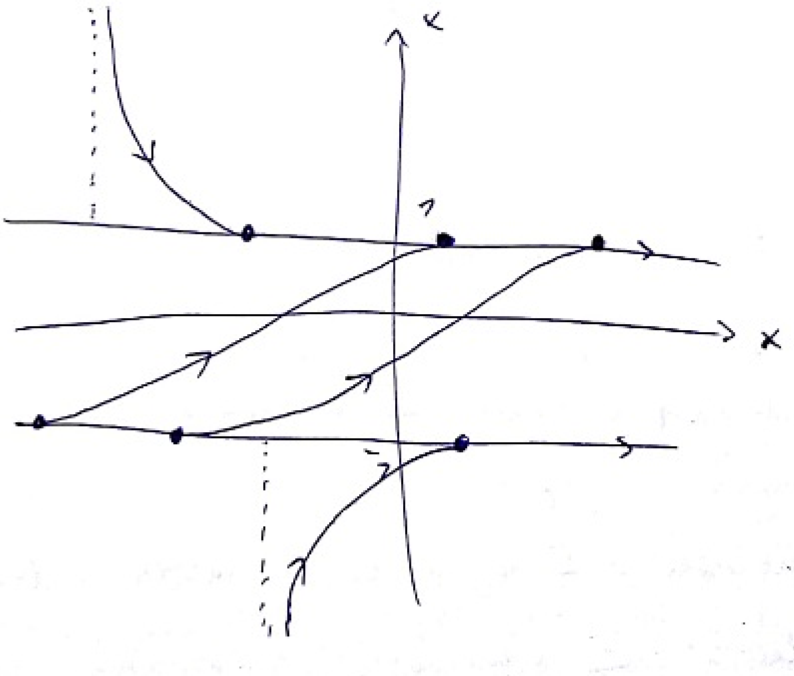
$$\approx \int_1^2 \frac{ds}{(s-1)^{\frac{1}{3}}} = \int_0^1 \frac{ds}{s^{\frac{1}{3}}} < \infty$$

$\Rightarrow$ hodnoty 1 se nabývá, řešení se mrazí!

ad 2) analogicky $\nearrow$ $\Rightarrow$ řešení se rozpojí a poté spojí

ad 3) analogicky 1)

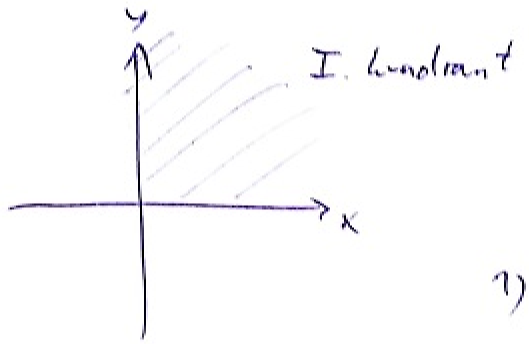
$\Rightarrow$



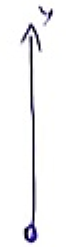
2.2 a) První řešení se nekříží, protože systém má jednoznačné řešení: "f_x" je tady $\nabla_{x,y} f$.

$$\nabla_{x,y} f = \begin{pmatrix} 1-2x-y & -x \\ y & -2+x \end{pmatrix}$$ ... zřejmě lok. om. na $\mathbb{R}^2$

=> žádná křížení řešení



Aby řešení opustilo I. kvadrant, musí někde protnout osy! Ale na osách:

1) 

$x=0,\ y>0 \Rightarrow x'=0$
$y'=-2y<0$

=> 

2) $x=0=y \Rightarrow x'=0=y'$
... stac. bod

=> na kladné poloose y řešení neopustí nezápornou poloosu y

3) $x>0,\ y=0 \Rightarrow x'=x(1-x)$
$y'=0$

=> na kladné poloose x řešení neopustí kladnou poloosu x

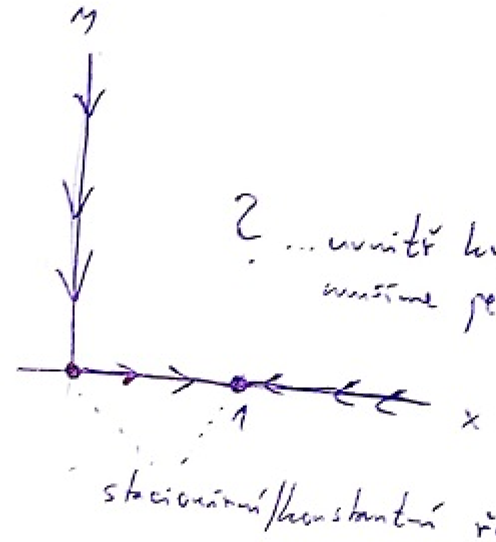
2.2 b) stacionární body, čili stacionární řešení, musí splňovat

$$x' = 0, \quad y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = x(1-x) - xy = x(1-x-y), \quad 0 = -2y + xy = (x-2)y$$

$$\Rightarrow (0,0),\ (1,0),\ \cancel{(2,-1)}$$

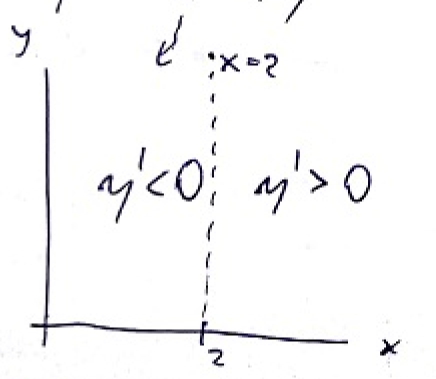
není v 1. kvadrantu, čili podle a) nás nezajímá

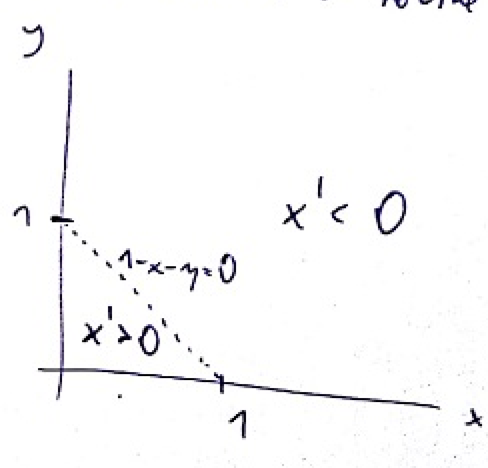
zatím máme:



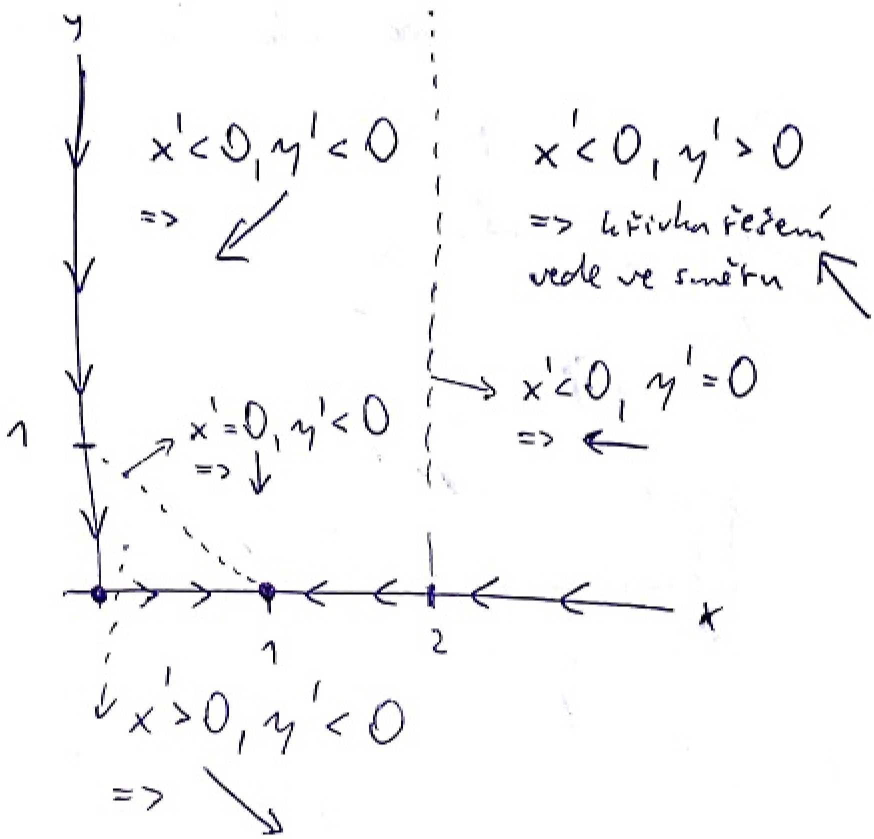
Řešení v rovině vykreslují křivku $(x(t), y(t))$, jejíž směr je dán skrze $(x'(t), y'(t))$. Zkoumejme tedy znaménka x', y' v závislosti na místě v rovině:

$$x' = x(1-x-y)$$
$$y' = (x-2)y$$

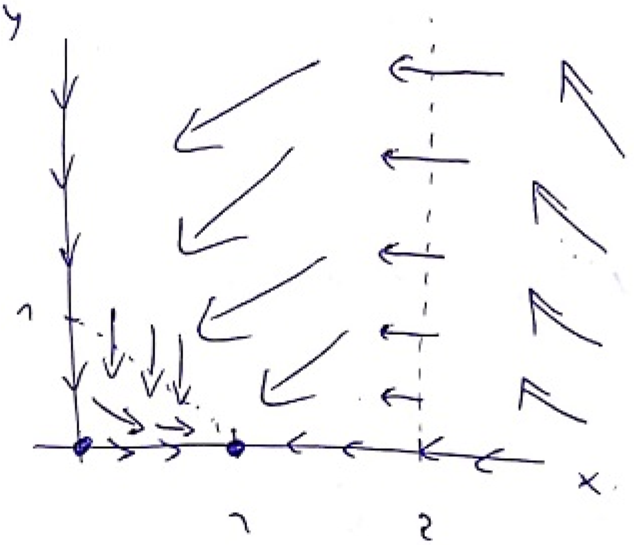




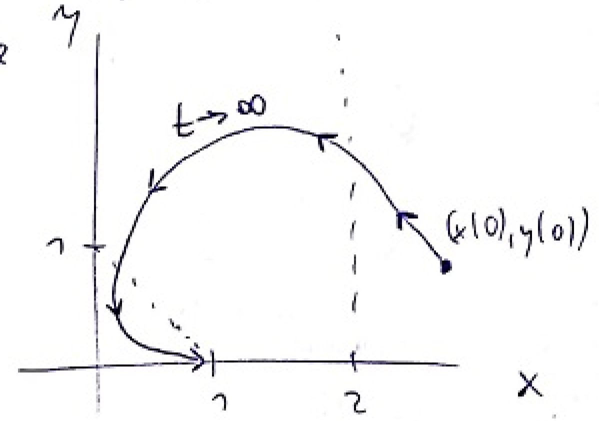
=>



celkem =>

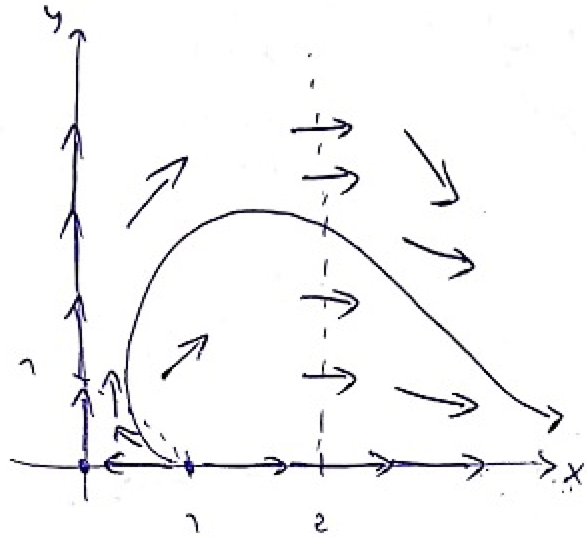


c) čili pokud $(x(0),y(0))$ leží uvnitř I. kvadrantu, lze očekávat vývoj populace



řešení začínající na (kladné polo)ose y konvergují ke stac. řešení (0,0)
Jinak všechna řešení konvergují k (1,0)

Abychom zjistili vývoj pro $t \to -\infty$, stačí všechny šipky otočit:



$\Rightarrow$ · řešení "začínající" na kladné poloose y pro $t \to -\infty$ konvergují k $(0, \infty)$

· řešení "začínající" na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1), y = 0\}$ konvergují k stac. řešení $(0,0)$

· všechna ostatní řešení pro $t \to -\infty$ konvergují k $(\infty, 0)$

2.3a)

$$u' - \beta u \leq 0 \quad / \cdot e^{-t\beta}$$

$$\underbrace{u' e^{-t\beta} - \beta e^{-t\beta} u}_{= (u e^{-t\beta})'} \leq 0$$

$$= (u e^{-t\beta})' \leq 0$$

$$\Rightarrow u(t) e^{-t\beta} - u(a) e^{-a\beta} \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u(t) \leq u(a) e^{(t-a)\beta}}$$

2.3 b)

$$u'(t) - \beta(t)u(t) \le 0 \quad \Big/ \cdot e^{-\int_a^t \beta(s)ds}$$

$$\left(u(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds}\right)' \le 0$$

$$u(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} - u(a)\underbrace{e^{-\int_a^a \beta(s)ds}}_{=e^{-0}=1} \le 0$$

$$\Rightarrow \quad u(t) \le u(a)e^{\int_a^t \beta(s)ds}$$

2.3 a)

$$u'(t) - \beta(t)u(t) \le \alpha(t) \quad \Big/ \cdot e^{-\int_a^t \beta(s)ds}$$

$$\left(u(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds}\right)' \le \alpha(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds}$$

$$u(t)e^{-\int_a^t \beta(s)ds} - u(a) \le \int_a^t \alpha(r)e^{-\int_a^r \beta(s)ds}\,dr$$

$\Rightarrow$ to co chceme. Při $\beta \in L^1(a,b)$ je lépe chtít $\beta \ge 0$ s.v., protože jinak máme problém s integrovatelností $\alpha(r)e^{-\int_a^r \beta(s)ds}$ (pro $\beta \ge 0$ zkrátka $\left|\alpha(r)e^{-\int_a^r \beta(s)ds}\right| \le |\alpha(r)|$)