Obyčejné diferenciální rovnice ZS 17/18

Dalibor Pražák, Josef Žabenský 9. října 2017

Série 1

1.1. Nádrž o objemu 1500 l na začátku obsahuje 600 l vody a v ní 5 kg rozpuštěné soli. Do nádrže vtéká voda rychlostí 9 l/h s rozpuštěnou solí o známé koncentraci $\mu(t)$ kg/l. Uvažujte otázku *Jestliže solný roztok vytéká z nádrže rychlostí 6 l/h, kolik soli bude v nádrži ve chvíli jejího naplnění?* Sestavte ODR, jejímž řešením byste se dobrali odpovědi. Explicitně řešit ji ovšem nemusíte.

Označíme-li $m(t)$ celkovou hmotnost soli v nádrži v čase t, vycházejte z předpokladu, že roztok je vždy dokonale promísený (tj. koncentrace je funkcí času, ale ne místa v nádrži) a že

$$\text{rychlost změny } m(t) = \text{rychlost přítoku } m(t) - \text{rychlost odtoku } m(t).$$

1.2. Vyšetřete (i graficky) průběh řešení následujících diferenciálních rovnic. Zaměřte se na

- existenci řešení
- jednoznačnost řešení
- stacionární (tj. konstantní) řešení
- monotonii (včetně typu) a extrémy
- konvexitu, konkavitu, inflexní body
- co když se řešení blíží problematickým bodům

(a) $x' = t^2(x+1)$

(b) $x' = x\ln(x+3)$

1.3. (a) Řešení rovnice $x' = (x+1)/(t+1)$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 2$. Kdy dosáhne hodnoty 4?

(b) Řešení rovnice $x' = t\ln(x)$ má v čase $t = 1$ hodnotu $x(1) = 1$. V jakém čase dosáhne hodnoty 2?

1.4. (a) Dokažte *Darbouxovu větu*: Buď I otevřený interval a $f : I \to \mathbb{R}$ funkce diferencovatelná na I. Potom f' je darbouxovská, tj. pro každé dva body $a, b \in I$ takové, že $a < b$, a každou hodnotu ξ ležící mezi $f'(a)$ a $f'(b)$ existuje bod $c \in [a, b]$ splňující $f'(c) = \xi$.

Návod: Pro netriviální případ zkoumejte funkci $g(t) = f(t) - \xi t$.

(b) Co lze říci o existenci řešení rovnice $x' = \operatorname{sgn}(x) + 1$, $x(0) = 0$?

1.5. Jako *autonomní rovnicí* označujeme rovnici ve tvaru $x' = f(x)$, kde f buď např. spojitá reálná funkce na intervalu. Ukažte, že:

(a) Každé řešení autonomní rovnice je monotónní.

Návod: Ukažte, že je-li $I \subset \mathbb{R}$ interval and $x\colon I \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce, potom pro nemonotónní x musí existovat $t_1, t_2 \in I$ splňující $x(t_1) = x(t_2)$ a $x'(t_1) \neq x'(t_2)$.

(b) Jestliže existuje vlastní limita $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_1$, pak nezbytně $f(x_1) = 0$.

Návod: Uijte $x(b) - x(a) = \int_a^b x'(s)\,ds$ platící pro C^1-funkce.

1.6. Proti trudnomyslnosti: Jste vězni zlého žalářníka, který za správné vyřešení hádanky nabízí svobodu. Je vám dáno 101 mincí, z nichž je 51 pravých a 50 falešných. Všechny pravé mince jsou totožné. Falešné mince jsou totožné s těmi pravými s tou výjimkou, že se ve své hmotnosti od těch pravých liší o 1 g (všechny falešné mince jsou o 1 g lehčí, nebo všecky o 1 g těžší; jen žalářník ví). Z této sbírky 101 mincí vám žalářník náhodně vybere jednu minci a vaším úkolem je určit, zda je pravá či falešná. Pro vaše rozhodnutí vám zapůjčí svou rovnoramennou váhu, která zobrazuje hmotnostní rozdíl mezi levou a pravou miskou (např. je-li nalevo 8,3 g a napravo 10,3 g, ukáže váha −2 g). Můžete vážit libovolné ze 101 mincí, ale váhy smíte užít pouze k jednomu měření. Jakou zvolit strategii k identifikaci mince?

Série 1 - řešení

1.1

$$m'(t) = 9\cdot m(t) - 6\cdot \frac{m(t)}{600+3t}$$

$m(0) = 5$

$m(300) = ?$

koncentrace soli v nádrži v čase t

1.2a

- $f(t,x) := t^2(x+1)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$

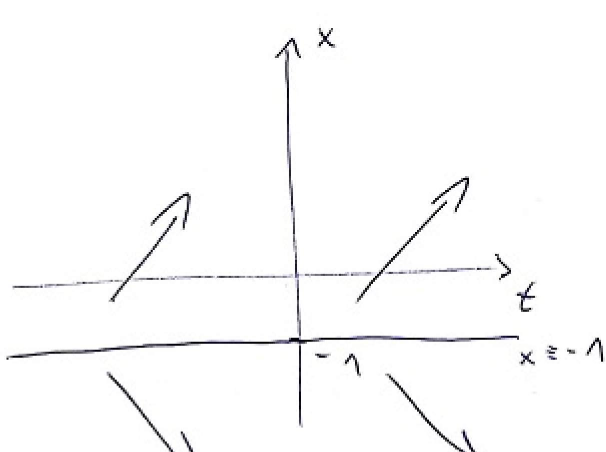
  $\Rightarrow$ oblast existence $= \mathbb{R}^2$

- $|f(t,\alpha) - f(t,\beta)| = \underbrace{t^2}_{\text{lok. omezená funkce } t} |\alpha - \beta|$

  $\Rightarrow \forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ je f lok. lips. v 2. proměnné

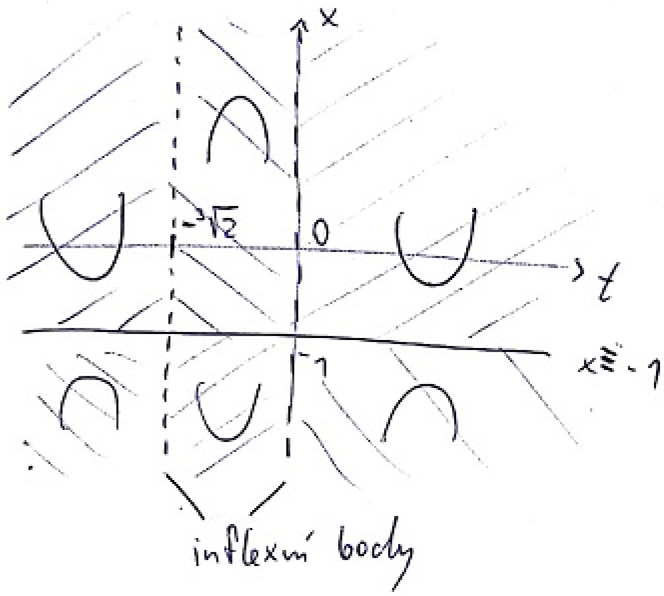
  $\Rightarrow$ oblast jednoznačnosti $= \mathbb{R}^2$

- stacionární řešení jediné, a to $x \equiv -1$

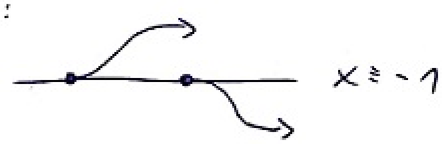
- 

na ose $t \equiv 0$ kritické body, ale ne extrémy! (tj. striktní extrémy, jinak $x \equiv -1$ má extrémy všude)

- $$x''(t) = \frac{d}{dt} f(t, x(t)) = f_t + f_x f = 2t(x+1) + t^4(x+1)$$
$$= t(t^3+2)(x+1)$$

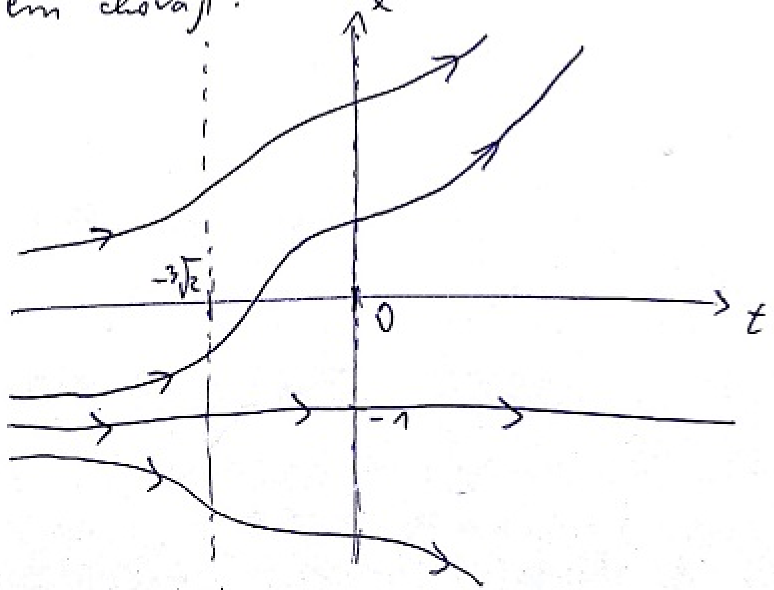
$\Rightarrow$ 

- problémové body jsou zde leda $\{x \equiv -1\}$, protože se nabízí otázka, zda může stacionární řešení opustit svůj kurz:



To však není možné z ukázané jednoznačnosti!

$\Rightarrow$ celkově se řešení chovají:



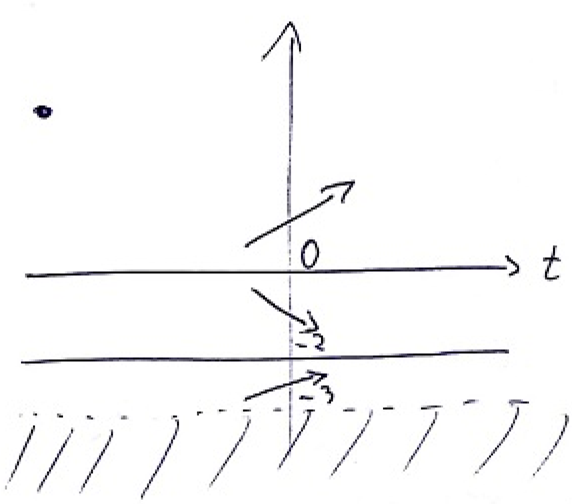
1.2b

- $f(x) := x \ln(x+3)$ je spojitá a definovaná pro $x > -3$
  $\Rightarrow$ oblast existence $= \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x > -3\}$

- $$|f(\alpha) - f(\beta)| = \left| \int_\beta^\alpha f_x(s)\,ds \right| \overset{\substack{\text{BÚNO}\\ \alpha > \beta}}{\leq} \int_\beta^\alpha |f_x(s)|\,ds \leq$$
  $$\leq \max_{x \in [\alpha,\beta]} |f_x| \cdot |\alpha - \beta| =$$
  $$\leq \underbrace{\max_{x \in [\alpha,\beta]} \left(|\ln(x+3)| + \frac{x}{x+3} \right)}_{\text{lok. omezená funkce pro } \alpha, \beta > -3} \cdot |\alpha - \beta|$$

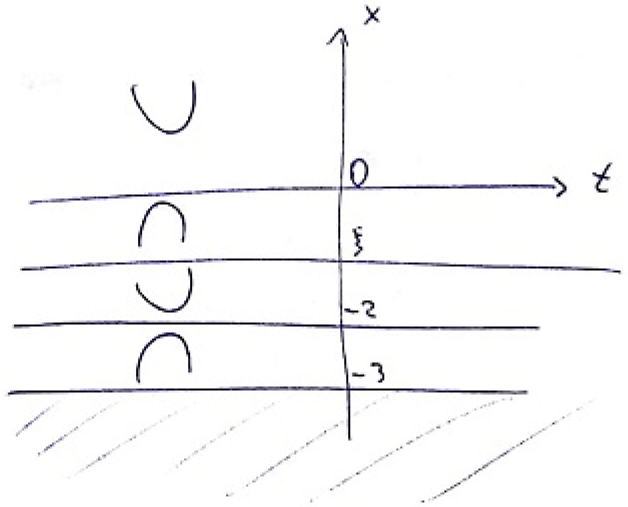
  $\Rightarrow \forall x_0 > -3$ je $f(x)$ lipšitzovská na nějakém okolí x_0
  $\Rightarrow$ oblast jednoznačnosti $= \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x > -3\}$

- 2 stacionární řešení, a to $x \equiv 0$ a $x \equiv -2$

- 

- $$x'' = f_x \cdot f = x \ln(x+3) \underbrace{\left(\ln(x+3) + \frac{x}{x+3} \right)}$$
  tato funkce je striktně rostoucí na $(-3, \infty)$; v bodě -2 je < 0
  v bodě 0 je > 0
  $\Rightarrow$ má jediný nulový bod "někde mezi" -2 a 0, označme si ho ξ
  ("někde mezi" nejde explicitně spočíst!)

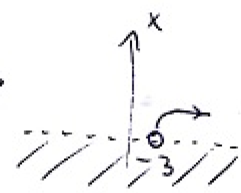
=>



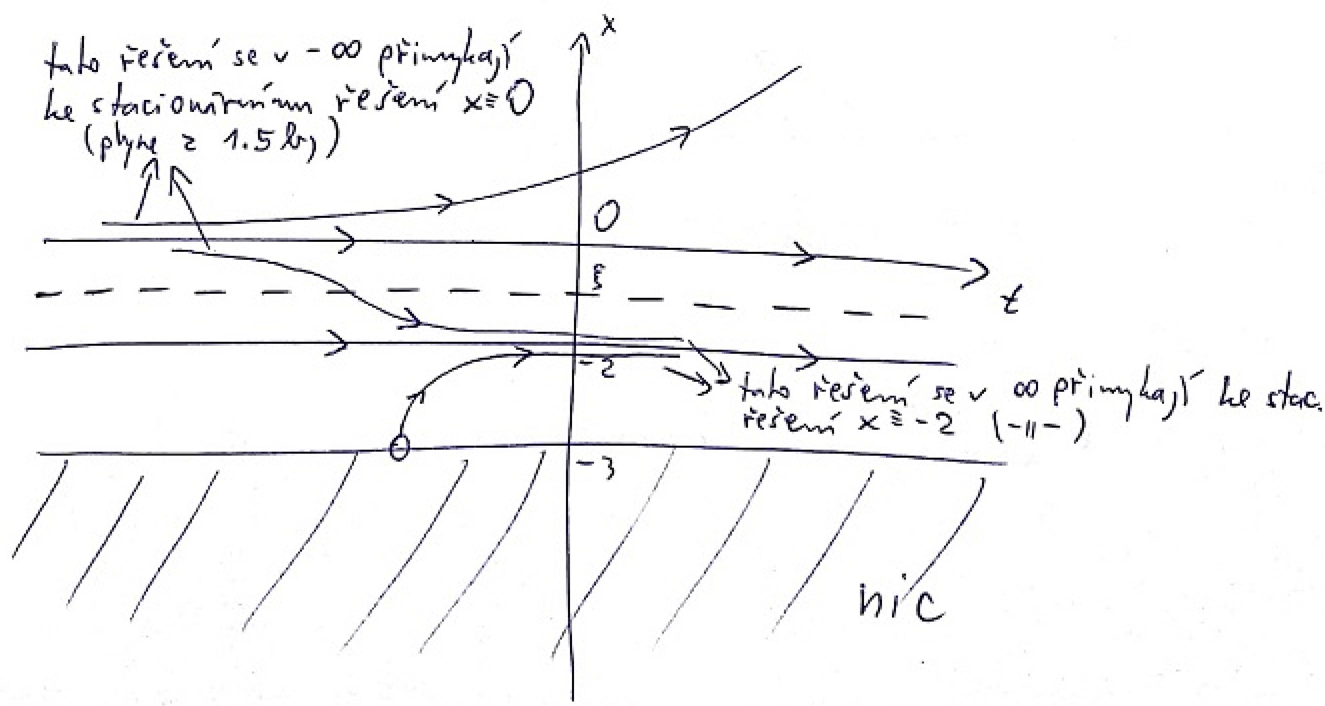
jedinými inflexními body jsou $\{(t,\xi): t\in\mathbb{R}\}$,
protože $\{(t,0): t\in\mathbb{R}\}$ a $\{(t,-2): t\in\mathbb{R}\}$
odpovídají stacionárním řešením, které se z jednoznačnosti ani nerozpojují, ani se na ně nic nenapojuje

- problémový bod: $\{(t,-3): t\in\mathbb{R}\}$

  z rovnice plyne, že $\lim\limits_{x\searrow -3} x' = -\infty$ =>



=> celkově se řešení chovají:



<u>1.3 a)</u> buď to v čase $\xi > 1$: $\frac{x'}{x+1} = \frac{1}{t+1} \quad / \int_1^{\xi} dt$

$$[\ln|x+1|]_1^{\xi} = [\ln|t+1|]_1^{\xi}$$

$$\ln 5 - \ln 3 = \ln(\xi+1) - \ln 2$$

$$\frac{10}{3} - 1 = \xi$$

$$\underline{\frac{7}{3} = \xi}$$

<u>1.3 b)</u> Užijeme-li hrubou sílu, získáme $\xi = \infty$, tj. řešení hodnoty 2 nedosáhne nikdy.

Chytře si můžeme všimnout, že na okolí $(t,1)$ rovnice má vlastnost globální jednoznačnosti a přitom $x \equiv 1$ je stacionární řešení

$\Rightarrow$ <u>uvedené řešení hodnotu 1 nikdy neopustí</u>

<u>1.4a.</u> BÚNO $f'(a) < \xi < f'(b)$

Uvaž $g(t) := f(t) - \xi \cdot t$

g spojitá na $[a,b]$ $\Rightarrow$ nabývá tam minima v bodě $c \in [a,b]$

<u>? kde je c ?</u> 1) $c = a \ldots g'(a) = f'(a) - \xi < 0$

$\Rightarrow$ a není bodem minima g $\Rightarrow c \neq a$

2) $c = b \ldots g'(b) = f'(b) - \xi > 0$

$\Rightarrow$ b není bodem minima g $\Rightarrow c \neq b$

$\Rightarrow c \in (a,b)$ & $\underline{0 = g'(c) = f'(c) - \xi}$

<u>1.4 b</u> 1) buď to řešení konstantní $\Rightarrow x \equiv 0 \overset{z\ rce}{\Longrightarrow} x'(0) = 1 \ldots \lightning$

2) jinak $\Rightarrow x'$ nabývá aspoň dvou ze tří různých hodnot

$\Rightarrow x'$ není darbouxovská $\lightning$

$\Rightarrow \nexists$ řešení

1.5a) (nejtěžší úloha série)

Ukážeme-li návod, máme vyhráno, neboť rce říká

$$x(t_1)=x(t_2) \Rightarrow x'(t_1)=x'(t_2)$$

Nechť řešení není monotónní $\Rightarrow \exists\, a, b \in I: f'(a)\cdot f'(b)<0$

BÚNO $f'(a) > 0 > f'(b)$ (*)

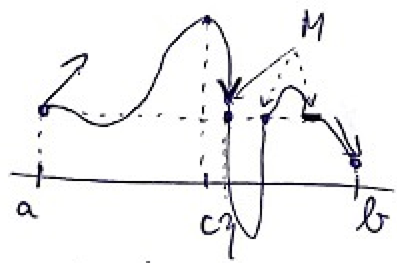
f má na $[a,b]$ glob. max v bodě c a kvůli (*) nutně $a<c<b$

3 Možnosti:

1) $f(a)>f(b)$: def $M:=\{t\in(c,b): f(t)=f(a)\}\neq\emptyset$

M je om. a ze spoj. f i uzavřená $\Rightarrow M$ kompakt $\Rightarrow \exists\, \eta := \min M$.

- $f(\eta)=f(a)$
- $\forall t\in(c,\eta): f(t)>f(\eta) \Rightarrow f'(\eta)=f'_-(\eta)<0<f(a)$



2) $f(a)<f(b)$: Analogicky s $M:=\{t\in(a,c): f(t)=f(b)\}$

3) $f(a)=f(b)$: Jsme hotovi

1.5b) Nechť ne, tj. BÚNO $f(x_1)>0$

f spojitá $\Rightarrow \exists\, t_0\ \forall t\geq t_0: f(x(t))>\dfrac{f(x_1)}{2}$

$$\Rightarrow \underbrace{x(t)-x(t_0)}_{\xrightarrow{t\to\infty} x_1-x(t_0)\in\mathbb{R}} = \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,ds > \frac{f(x_1)}{2}\int_{t_0}^{t} ds = \underbrace{\frac{f(x_1)}{2}(t-t_0)}_{\xrightarrow{t\to\infty}\infty}$$

↯