Dalibor Pražák, Josef Žabenský 9. října 2017

Série 1

1.1. Nádrž o objemu 1500 l na začátku obsahuje 600 l vody a v ní 5 kg rozpuštěné soli. Do nádrže vtéká voda rychlostí 9 l/h s rozpuštěnou solí o známé koncentraci $\mu(t)$ kg/l. Uvažujte otázku *Jestliže solný roztok vytéká z nádrže rychlostí 6 l/h, kolik soli bude v nádrži ve chvíli jejího naplnění?* Sestavte ODR, jejímž řešením byste se dobrali odpovědi. Explicitně řešit ji ovšem nemusíte.

Označíme-li $m(t)$ celkovou hmotnost soli v nádrži v čase t, vycházejte z předpokladu, že roztok je vždy dokonale promísený (tj. koncentrace je funkcí času, ale ne místa v nádrži) a že

$$\text{rychlost změny } m(t) = \text{rychlost přítoku } m(t) - \text{rychlost odtoku } m(t).$$

1.2. Vyšetřete (i graficky) průběh řešení následujících diferenciálních rovnic. Zaměřte se na

- existenci řešení
- jednoznačnost řešení
- stacionární (tj. konstantní) řešení
- monotonii (včetně typu) a extrémy
- konvexitu, konkavitu, inflexní body
- co když se řešení blíží problematickým bodům

(a) $x' = t^2(x+1)$

(b) $x' = x\ln(x+3)$

1.3. (a) Řešení rovnice $x' = (x+1)/(t+1)$ má v čase $t=1$ hodnotu $x(1)=2$. Kdy dosáhne hodnoty 4?

(b) Řešení rovnice $x' = t\ln(x)$ má v čase $t=1$ hodnotu $x(1)=1$. V jakém čase dosáhne hodnoty 2?

1.4. (a) Dokažte *Darbouxovu větu*: Buď I otevřený interval a $f : I \to \mathbb{R}$ funkce diferencovatelná na I. Potom f' je darbouxovská, tj. pro každé dva body $a, b \in I$ takové, že $a < b$, a každou hodnotu ξ ležící mezi $f'(a)$ a $f'(b)$ existuje bod $c \in [a,b]$ splňující $f'(c) = \xi$.

Návod: Pro netriviální případ zkoumejte funkci $g(t) = f(t) - \xi t$.

(b) Co lze říci o existenci řešení rovnice $x' = \operatorname{sgn}(x) + 1$, $x(0) = 0$?

1.5. Jako *autonomní rovnicí* označujeme rovnici ve tvaru $x' = f(x)$, kde f buď např. spojitá reálná funkce na intervalu. Ukažte, že:

(a) Každé řešení autonomní rovnice je monotónní.

Návod: Ukažte, že je-li $I \subset \mathbb{R}$ interval and $x\colon I \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce, potom pro nemonotónní x musí existovat $t_1, t_2 \in I$ splňující $x(t_1) = x(t_2)$ a $x'(t_1) \neq x'(t_2)$.

(b) Jestliže existuje vlastní limita $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_1$, pak nezbytně $f(x_1) = 0$.

Návod: Uijte $x(b) - x(a) = \int_a^b x'(s)\,ds$ platící pro C^1-funkce.

1.6. Proti trudnomyslnosti: Jste vězni zlého žalářníka, který za správné vyřešení hádanky nabízí svobodu. Je vám dáno 101 mincí, z nichž je 51 pravých a 50 falešných. Všechny pravé mince jsou totožné. Falešné mince jsou totožné s těmi pravými s tou výjimkou, že se ve své hmotnosti od těch pravých liší o 1 g (všechny falešné mince jsou o 1 g lehčí, nebo všecky o 1 g těžší; jen žalářník ví). Z této sbírky 101 mincí vám žalářník náhodně vybere jednu minci a vaším úkolem je určit, zda je pravá či falešná. Pro vaše rozhodnutí vám zapůjčí svou rovnoramennou váhu, která zobrazuje hmotnostní rozdíl mezi levou a pravou miskou (např. je-li nalevo 8,3 g a napravo 10,3 g, ukáže váha -2 g). Můžete vážit libovolné ze 101 mincí, ale váhy smíte užít pouze k jednomu měření. Jakou zvolit strategii k identifikaci mince?