**Obyčejné diferenciální rovnice**

Dalibor Pražák, Josef Žabenský

ZS 17/18
4. prosince 2017

# Písemka 2

Z úloh 3.A a 3.B si zvolte dle libosti.

**1.** Uvažujte lineární systém s konstantní maticí $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ a parametrem $\lambda \in \mathbb{R}$. Spočtěte maticovou exponenciálu, nalezněte obecný (vzhledem k poč. podmínce) tvar řešení, určete stabilitu počátku v závislosti na $\lambda$ a načrtněte trajektorie řešení pro $\lambda = 0$ a $\lambda > 0$.

*Poznámka:* Největší váhu nese poslední úkol, ty ostatní k němu jen vytyčují cestu.

**10 bodů**

**2.** Pomocí Hartman-Grobmanovy věty rozhodněte o stabilitě a načrtněte chování řešení v okolí stacionárního bodu systému

$$\begin{aligned} x' &= \exp(2x + 2y) + x \\ y' &= \arccos(x - x^3) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

*Poznámka:* Kdo by si pamatoval $\arccos'$? Bonusový bod za nalezení potřebné hodnoty bez lovení vzorce z paměti!

**8 bodů**

**3.A.** Mějme systém

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ y' &= \phantom{-}x + y(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right). \end{aligned}$$

Graficky znázorněte řešení a u těch periodických rozhodněte o jejich stabilitě.

*Poznámka:* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pravá strana je v počátku rovna nule.

**7 bodů**

**3.B.** Uvažujte skalární rovnici $x' = f(x)$ pro spojitou funkci $f$ se stacionárním bodem $x_0$. Na základě znaménka $f$ na pravém a levém okolí $x_0$ zformulujte a dokažte postačující podmínky zaručující stabilitu, asymptotickou stabilitu a nestabilitu $x_0$. Jak byste podmínky formulovali v případě existence $f'(x_0) \neq 0$?

**7 bodů**

*Hodně štěstí a dvakrát měř!*

# Test 2

Pick either 3.A or 3.B; whichever suits your fancy.

**1.** Consider a linear system with a constant matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ with $\lambda \in \mathbb{R}$. Compute the matrix exponential, find a general (with respect to the initial condition) form of solutions, determine stability of the origin depending on $\lambda$ and sketch the phase portrait of the system for $\lambda = 0$ and $\lambda > 0$.

*Note:* The most important piece of this task is the last part, the others just pave the way towards it.

**10 points**

**2.** Using Hartman-Grobman's Theorem decide about stability and sketch the phase portrait in the neighbourhood of the stationary point of the system

$$\begin{aligned} x' &= \exp(2x + 2y) + x \\ y' &= \arccos(x - x^3) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

*Note:* Who would remember $\arccos'$? A bonus point for finding the required value without showing off encyclopaedic knowledge!

**8 points**

**3.A.** Consider system

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ y' &= \phantom{-}x + y(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right). \end{aligned}$$

Sketch the phase portrait and establish stability of the periodic solutions.

*Note:* Without loss of generality assume that the right-hand side is zero at the origin.

**7 points**

**3.B.** Consider a scalar equation $x' = f(x)$ for a continuous function $f$ with a stationary point $x_0$. Based on the sign of $f$ in the right and left neighbourhood of $x_0$, formulate and prove sufficient conditions guaranteeing stability, asymptotic stability and instability of $x_0$. How would you formulate the conditions in case of existence of $f'(x_0) \neq 0$?

**7 points**

*I wish you good luck and measure twice, cut once!*