Ordinary Differential Equations ZS 17/18

Dalibor Pražák, Josef Žabenský 30. října 2017

Písemka 1

Za třetí úlohu si zvolte buď A, nebo B.

1. Vyšetřete chování řešení rovnice $x' = 2tx - 2$, aniž byste je explicitně určovali. Konkrétně zkoumejte

- existenci a jednoznačnost
- monotonii, extrémy, stacionární řešení
- konvexitu, konkavitu, inflexní body

Průběhy řešení nakonec načrtněte, aniž byste se zabývali otázkou blow-upů. **8 bodů**

2. Nechť $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ řeší úlohu

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + e^{\lambda} t, \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Najděte $\dfrac{\partial^2}{\partial x_0 \partial \lambda} \varphi(t, 0, 0, 1)$. **8 bodů**

3.A. Zlotřilý sluha upíjí svému pánovi ze sudu víno. Na sud namontuje dvě trubice: jednou odvádí víno rychlostí 4 litry za den, druhou do sudu přivádí čistou vodu rychlostí 3 litry za den, takže sud se pomalu vyprazdňuje a víno v něm se navíc stává čím dál zředěnější. Po třech dnech pán ze sudu ochutnal a znaleckým jazykem zjistil, že obsah alkoholu byl oproti začátku poloviční. Kolik litrů vína bylo tedy v sudu na začátku?

9 bodů

Poznámka: Předpokládejte, že koncentrace závisí pouze na čase a že rychlosti přívodu a odvodu tekutin jsou v čase konstantní. Při modelaci vycházejte ze vztahu

$$\text{rychlost změny} = \text{rychlost příbytku} - \text{rychlost úbytku}.$$

Za zkoumanou funkci doporučuji zvolit si množství vína v sudu v čase t.

3.B. (a) Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá a omezená. Může pak řešení rovnice $x' = f(x)$ zažít *blow-up* v konečném čase? **3 body**

Poznámka: Správná odpověď neznamená správné řešení – oživte vaše tvrzení důkazem!

(b) Uvažujme spojitou funci $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, splňující pro všechna $x \in \mathbb{R}$ rovnost

$$v(x) = -\frac{x}{2} \int_0^x v(y)\, dy.$$

Ukažte, že potom $v \equiv 0$. **6 bodů**

Přeji vám mnoho štěstí a zábavy!

Ordinary Differential Equations

Dalibor Pražák, Josef Žabenský

ZS 17/18
30. října 2017

Test 1

For the third problem, pick either A or B.

1. Analyze qualitatively the equation $x' = 2tx - 2$ without finding its solutions. In particular, investigate

- existence and uniqueness
- monotonicity, extrema and stationary solutions
- convexity, concavity, inflexion

Sketch the solutions graphically in the end, ignoring the question of blow-ups. **8 points**

2. Let $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ solve

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + e^\lambda t, \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Find $\dfrac{\partial^2}{\partial x_0 \partial \lambda} \varphi(t, 0, 0, 1)$. **8 points**

3.A. A villainous servant steals his master's wine from a cask. He attaches two tubes to the cask: one drains the wine at a rate of 4 litres per day, the other pumps pure water into the cask at a rate of 3 litres per day so that the cask is slowly getting empty and the wine inside is becoming increasingly more diluted. After three days, the master had a sip from the cask and his gourmet taste buds revealed that the alcohol content had halved since the beginning. How much wine was initially in the cask?

9 points

Note: Assume that the concentration depends on time only and that velocities of inflow and outflow are constant in time. Base your modeling on the relation

rate of change = rate of gain − rate of loss.

I suggest you choose the amount of wine in the cask at time t as the investigated function.

3.B. (a) Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be continuous and bounded. Can a solution to the equation $x' = f(x)$ experience *blow-up* in finite time? **3 points**

Note: A correct answer is not yet a correct solution – enliven your statement with a rigorous proof!

(b) Consider a continuous function $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfying

$$v(x) = -\frac{x}{2} \int_0^x v(y)\, dy.$$

for all $x \in \mathbb{R}$. Show that $v \equiv 0$. **6 points**

I wish you good luck and have fun!