1. TERMÍN – 16.1.2020

---

1. [10b] Je dán systém rovnic

$$x' = x^2 - 2x + y$$
$$y' = y(1 - x)$$

Při řešení všech následujících úloh se omezte na kvadrant $x \geq 0$, $y \geq 0$.
(i) Najděte stacionární body a popište množiny, kde nastává $x' > 0$ respektive $x' < 0$ a kde $y' > 0$ respektive $y' < 0$.
(ii) U stacionárních bodů, které leží *na souřadných osách*, najděte matici linearizace a vyšetřete stabilitu. BONUS (nepovinné): vyšetřete stabilitu stacionárního bodu *uvnitř* prvního kvadrantu.
(iii) Načrtněte globální průběhy několika reprezentativních řešení (stále platí omezení na první kvadrant, ovšem včetně souřadných os). Obrázek alespoň 10×10 cm!
(iv) Ukažte, že žádné řešení nemůže opustit první kvadrant. Rozhodněte, zda však některá řešení nemohou „utéci do nekonečna" v konečném čase. Odpověď zdůvodněte. *Nápověda: uvažujte rovnici pro $x(t)$ dosti daleko od osy y.*

---

2. [5b] Nechť $\phi = \phi(t, a, \lambda)$ je řešicí funkce rovnice

$$x'' + 2\sin x = \lambda^2 + \lambda \qquad x(0) = a, \quad x'(0) = 0$$

(i) Napište rovnici pro $u = \frac{\partial \phi}{\partial a}$ – nejprve obecně a poté vyřešte pro $a = \pi$, $\lambda = 0$
(ii) Napište rovnici pro $v = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$ – nejprve obecně a poté vyřešte pro $a = \pi$, $\lambda = 0$
(iii) Napište rovnici pro $w = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2}$ – stačí obecně
(iv) Napište rovnici pro $z = \frac{\partial^3 \phi}{\partial \lambda^2 \partial a}$ stačí obecně

---

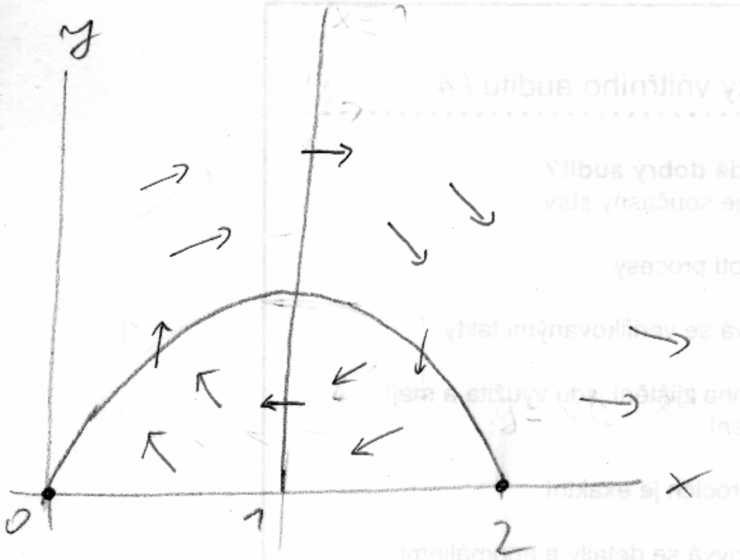
3. [5b] Nechť $x(t)$ je netriviální řešení rovnice

$$x'' + \frac{49x}{(t+1)^2} = 0$$

v intervalu $(0, +\infty)$. Aplikací srovnávací věty na rovnici $y'' + ay = 0$, kde $a > 0$ je vhodná konstanta, ukažte, že:
(i) V intervalu $(0, \Delta)$, kde $\Delta > 0$ je dost malé, má $x(t)$ nejvýše jeden (či dokonce žádný) nulový bod.
(ii) V každém intervalu $(T, 2T)$, kde $T > 0$ je dost velké, má $x(t)$ alespoň jeden nulový bod.

① $x' = x^2 - 2x + y \quad : \; x' > 0 : \; y > x(2-x)$

$y' = y(1-x) \quad : \; y' > 0 \Rightarrow x < 1$



stac. body:

$\alpha = (0,0)$

$\beta = (2,0)$

$\gamma = (1,1)$

ad α) $\quad A = DF(\alpha) = \begin{pmatrix} -2, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \ldots \; \sigma(A) = \{-2, 1\}$

nestabilní

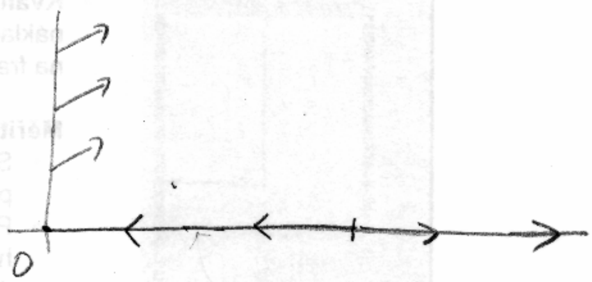
ad β) $\quad B = DF(\beta) = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \ldots \; \sigma(B) = \{2, -1\}$

nestabilní

(iv): $\quad x = 0 : \; x' = y > 0$

$\boxed{y \equiv 0 : \; x' = x(2-x) \ldots}$

tj. osa x „je řešení" (jednoznačnost)



blow-up: ANO: $\quad x' = x^2 - 2x + y > x^2 - 2x > \frac{1}{2}x^2$

(pro $x(t) \gg 2$)

neboť: $y' = \frac{1}{2}y^2$ má blow-up

Barrow: $T_\infty - T_0 = \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{y^2/2} < \infty$

BONUS: změna souřadnic: $(1,1) \to (0,0)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= X+1 \\ y &= Y+1 \end{aligned}}$$

$$X' = (X+1)^2 - 2(X+1) + Y + 1 = X^2 + Y$$

$$Y' = (Y+1)(-X) = -X(Y+1)$$

$$\frac{dX}{dY} = \frac{X^2+Y}{-X(Y+1)} = \frac{-X}{Y+1} - \frac{Y}{Y+1} \cdot \frac{1}{X}, \quad \boxed{X = X(Y)}$$

umíme integrovat: (Bernoulli)

$$\frac{d}{dY} X + \frac{X}{Y+1} = -\frac{Y}{Y+1} \cdot \frac{1}{X} \quad \Big/ \cdot 2X$$

$$\frac{d}{dY} X^2 + \frac{2}{Y+1} \cdot X^2 = \frac{-2Y}{Y+1} \quad \Big/ \cdot (Y+1)^2$$

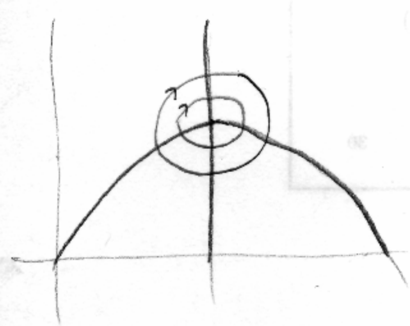
$$\frac{d}{dY}\left(X^2 (Y+1)^2\right) = -2Y(Y+1)$$

$$V = X^2 (Y+1)^2 + Y^2 + \frac{2}{3} Y^3$$

– první integrál, navíc:

$$V(0,0) = 0$$

$$V(X,Y) = X^2 + Y^2 + \dots$$



⇒ pozitivně definitní na jistém okolí $(0,0)$

⇒ stabilita (neasymptotická)

(2) $x'' + 2\sin x = \lambda^2 + \lambda$, $x(0) = a$, $x'(0) = 0$

(i) $u'' + (2\cos x)u = 0$, $\boxed{u(0) = 1,\ u'(0) = 0}$

$\left.\begin{matrix} a = \pi \\ \lambda = 0 \end{matrix}\right\}$ $x(t) \equiv \pi$ $\quad u'' - 2u = 0$

$u(t) = \cosh(\sqrt{2}\,t)$

(ii) $v'' + (2\cos x)v = 2\lambda + 1$ $\quad \boxed{v(0) = v'(0) = 0}$

$\left.\begin{matrix} a = \pi \\ \lambda = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x(t) \equiv \pi$ $\quad \boxed{v'' - 2v = 1}$

$v(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh(\sqrt{2}\,t)$

(iii) $w = \frac{\partial v}{\partial \lambda}$: $w'' + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{(2\cos x)v\right\} = 2$

$w'' + (2\cos x)w - (2\sin x)v^2 = 2$

(iv) $r = \frac{\partial}{\partial a} w$

$r'' + \frac{\partial}{\partial a}\left\{(2\cos x)w - (2\sin x)v^2\right\} = 0$

$r'' + (2\cos x)r - (2\sin x)uw - (2\cos x)uv^2$
$- (2\sin x)2v\frac{\partial v}{\partial a} = 0$

$"\frac{\partial^2 \phi}{\partial a \partial \lambda}"$

③ $x'' + q(t)x = 0; \quad q(t) = \dfrac{49}{(t+1)^2}$

(i) $q(t) < q(0) = 49 \quad \text{v} \ (0, \Delta)$

Lemma z cvičení: $t_1, t_2 \in (0, \Delta)$ sousední nul. body

$\Rightarrow d = |t_1 - t_2| \geq \dfrac{\pi}{\sqrt{49}} = \dfrac{\pi}{7}$

Tedy: $\Delta < \dfrac{\pi}{7} \Rightarrow (0, \Delta)$ má nejvýše jeden nulový bod t_0

$\Rightarrow (0, t_0)$ nemá už žádný

(ii) $q(t) > q(2T) = \dfrac{49}{(2T+1)^2}, \ t \in (T, 2T)$

opět Lemma: $d \leq \dfrac{\pi}{7/(2T+1)} = (2T+1) \cdot \dfrac{\pi}{7}$

úvaha: $\dfrac{\pi}{7} < \dfrac{1}{2}, \ \cancel{t} \ (2T+1)\dfrac{\pi}{7} < T$

(pro T dost velké)

$\Rightarrow$ aspoň 1 nul. bod v $(T, 2T)$