Variace konstant – integrální tvar.

Variací konstant se někdy rozumí vyjádření partikulárního řešení jako konvoluce pravé strany a vhodného řešení homogenní úlohy. Získaný explicitní vzorec je též užitečný díky vyjádření počátečních podmínek.
Zformulujme tvrzení pro jednoduchost pouze pro rovnici s konstantními koeficienty:

$$\mathscr{K}[y] = f(t)\,, \tag{1}$$

kde $\mathscr{K}[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n$.

Věta 1. Nechť $\omega(t)$ je řešení homogenní úlohy $\mathscr{K}[y] = 0$ s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} \omega(0) = \omega'(0) = \cdots = \omega^{(n-2)}(0) = 0\,, \\ \omega^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Potom

$$y_p(t) = \int_0^t \omega(t-s) f(s)\, ds \tag{3}$$

je řešení úlohy (1) s nulovými počátečními podmínkami:

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0\,. \tag{4}$$

Před důkazem se podívejme na dva ilustrativní příklady.

Příklad 1. Máme rovnici $y'' + a^2 y = f(t)$. Fundamentální systém zvolme $y_1(t) = \cos at$, $y_2(t) = \frac{1}{a}\sin at$. Všimněme si, že $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, tj. y_2 je hledané ω – řešení homogenní úlohy s počátečními podmínkami (2). Tudíž $y_p(t) = \frac{1}{a}\int_0^t \sin[a(t-s)] f(s)\, ds$ a obecné řešení má tvar

$$y(t) = c_1 \cos at + \frac{c_2}{a}\sin at + \int_0^t \frac{\sin[a(t-s)]}{a} f(s)\, ds\,.$$

Porovnáním počátečních podmínek navíc zjistíme, že $c_1 = y(0)$, $c_2 = y'(0)$.

Příklad 1. *Nechť $x(t)$ je C^2 funkce a $x''(t) + x'(t) + x(t) \to 0$ pro $t \to \infty$. Potom $x(t) \to 0$ pro $t \to \infty$.*
Tuto úlohu (z řešitelského semináře) snadno vyřešíme pomocí Věty 1. Uvědomme si, že $x(t)$ je řešení úlohy

$$y'' + y' + y = f(t) \tag{5}$$

kde $f(t) := x''(t) + x'(t) + x(t)$. Charakteristický polynom má kořeny $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$, tj. fundamentální systém tvoří funkce $\{y_1(t), y_2(t)\}$, kde $y_1(t) =$

$\exp(-t/2)\cos\sqrt{3}t/2$, $y_2(t) = \exp(-t/2)\sin\sqrt{3}t/2$. Navíc $\omega(t) := 2y_2(t)/\sqrt{3}$ splňuje zjevně podmínky (2). Obecné řešení rovnice (5) (a tedy i $x(t)$) má tvar

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^t y_2(t-s)f(s)\,ds\,.$$

Tvrdíme, že toto jde do 0 pro $t \to \infty$. První dva členy jsou jasné, zbývá odhadnout integrál, což se provede standardním roztržením na dva kusy. Protože $f(t) \to 0$ pro $t \to \infty$, zvolím $K > 0$ tak, že $|f(t)| \le \varepsilon$ pro $t > K$. S využitím odhadu $|y_2(t-s)| \le \exp(-(t-s)/2)$ máme pro $t > K$

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^t y_2(t-s)f(s)\,ds\Big| &\le \int_0^K \mathrm{e}^{-(t-s)/2}\,f(s)\,ds + \varepsilon\int_K^t \mathrm{e}^{-(t-s)/2}\,ds\\ &= \mathrm{e}^{-t/2}\int_0^K \mathrm{e}^{s/2}\,f(s)\,ds + 2\varepsilon\underbrace{\big(1-\mathrm{e}^{-(t-K)/2}\big)}_{\le 1}\,.\end{aligned}$$

To je pro t dost velké menší než 3ε, čímž je důkaz hotov. □

K důkazu Věty 1 je potřeba následující pomocné tvrzení, které je zajímavé samo o sobě.

Lemma 1. Nechť

$$F(t) = \int_0^t \phi(t,s)\,ds$$

kde ϕ je C^1 funkce. Potom

$$F'(t) = \phi(t,t) + \int_0^t \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,s)\,ds\,.$$

Důkaz Lemmatu 1. Jedná se vlastně o kombinaci derivace podle parametru a horní meze. Začneme definicí derivace

$$\frac{1}{h}\big(F(t+h)-F(t)\big) = \frac{1}{h}\Big(\int_0^{t+h}\phi(t+h,s)\,ds - \int_0^t \phi(t,s)\,ds\Big)\,,$$

což rozepíšeme jako

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Big(\int_0^{t+h}\phi(t,s)\,ds - \int_0^t\phi(t,s)\,ds\Big) + \frac{1}{h}\int_0^t \big[\phi(t+h,s)\,ds - \phi(t,s)\big]\,ds\\ =: \frac{1}{h}P_1(h) + \frac{1}{h}P_2(h)\,,\end{aligned}$$

plus zbytkový člen $\frac{1}{h}P_3(h)$, kde

$$P_3(h) := \int_0^{t+h} \phi(t+h,s)\,ds - \int_0^{t+h} \phi(t,s)\,ds - \int_0^{t} \phi(t+h,s)\,ds + \int_0^{t} \phi(t,s)\,ds\,.$$

Nyní

$$\frac{1}{h}P_1(h) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \phi(t,s)\,ds \to \phi(t,t)\,;$$

to je obyčejná derivace integrálu dle horní meze (t v integrandu je pevné), zatímco

$$P_2(h) \to \int_0^t \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,s)\,ds\,,$$

– neboť zde máme derivaci integrálu dle parametru (při neměnných mezích); patřičné předpoklady (majoranta) snadno plynou ze spojitosti a tudíž (lokální) omezenosti ϕ a $\frac{\partial\phi}{\partial t}$.
Člen $P_3(h)$ se zjednoduší na

$$P_3(h) = \int_t^{t+h} \big[\phi(t+h,s) - \phi(t,s)\big]\,ds\,.$$

Díky odhadu (věta o střední hodnotě)

$$\phi(t+h,s) - \phi(t,s) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t+\theta(s),s)\,h\,, \qquad \theta(s) \in (t,t+h)$$

a omezenosti $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ je konečně

$$\big|P_3(h)| \le |h| \int_t^{t+h} K|h|\,ds = K|h| \to 0\,.$$

□

Nyní můžeme provést
Důkaz Věty 1. Dosadíme jednoduše (3) do (1). Dle Lemmatu 1 je

$$y_p'(t) = \underbrace{\omega(0)}_{=0} f(t) + \int_0^t \omega'(t-s)f(s)\,ds = \int_0^t \omega'(t-s)f(s)\,ds$$

s využitím (2). Opakovaním téhož argumentu dostaneme

$$y_p^{(k)}(t) = \int_0^t \omega^{(k)}(t-s)f(s)\,ds\,, \qquad k = 0,\dots,n-1 \tag{6}$$

a konečně

$$y_p^{(n)}(t) = \underbrace{\omega^{(n-1)}(0)}_{=1/a_0} f(t) + \int_0^t \omega^{(k)}(t-s) f(s)\, ds\,,$$

Je tedy

$$\mathscr{K}[y_p](t) = a_0 \frac{1}{a_0} f(t) + \int_0^t \underbrace{\mathscr{K}[\omega]}_{=0}(t-s) f(s)\, ds = f(t)$$

neboť ω je řešení homogenní úlohy. Splnění počátečních podmínek (4) plyne z (6). $\square$