

Srovnávací věta.

Srovnávací věta se týká nulových bodů rovnic 2. řádu. Umožňuje odhadnout jejich rozložení srovnáním s jinou rovnicí.

Věta 1. Nechť y je netriviální řešení rovnice

$$y'' + q_1(t)y = 0 \quad (1)$$

a $t_0 < t_1$ jsou jeho sousední nulové body. Nechť z je řešení rovnice

$$z'' + q_2(t)z = 0 \quad (2)$$

přičemž

$$q_2(t) \geq q_1(t) \text{ v } [t_0, t_1]. \quad (3)$$

Potom z má v $[t_0, t_1]$ alespoň jeden nulový bod.

Dodatek. Je-li nerovnost (3) někde ostrá, má z nulový bod dokonce v (t_0, t_1) .

Poznámka. Názorná pomůcka k zapamatování: rovnice popisují pohyb pružiny $y'' = -qy$, tj. síla působí proti vychýlení, a q je koeficient tuhosti pružiny.¹ Předpoklad (3) tedy říká, že druhá pružina má větší tuhost, a pochopitelný závěr je, že z kmitá alespoň tak často jako y .

Důkaz Věty 1. Předběžná úvaha: BÚNO $y > 0$ v (t_0, t_1) – jinak přejdu k $-y$. Dále tvrdím, že $y'(t_0) > 0$, neboť $y'(t_0) < 0$ by bylo ve sporu se znaménkem y na pravém okolí t_0 . Nemůže být ani $y'(t_0) = 0$, protože máme rovnici 2. řádu a podmínka $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ jednoznačně určuje triviální řešení $y \equiv 0$, což je spor s předpokladem. Podobně se ukáže, že $y'(t_1) < 0$.

Nyní postupujeme sporem a předpokládáme, že $z \neq 0$ v $[t_0, t_1]$, BÚNO $z > 0$. Rovnici (1) násobíme z , rovnici (2) y , odečteme a integrujeme přes (t_0, t_1) . Protože

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} y''z - z''y \, dt &= [y'z - z'y]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} y'z' - z'y' \, dt \\ &= y'(t_1)z(t_1) - y'(t_0)z(t_0), \end{aligned}$$

je celkem

$$\underbrace{y'(t_1)}_{<0} z(t_1) + \underbrace{(-y'(t_0))}_{<0} z(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (q_2 - q_1)yz \, dt \quad (4)$$

Integrál vpravo je díky (3) nezáporný, levá strana záporná, neboť $z(t_0) > 0$, $z(t_1) > 0$. To je kýžený spor.

¹Který může být i záporný.

Důkaz dodatku. Potřebujeme přivést ke sporu slabší předpoklad $z > 0$ v (t_0, t_1) . Ze spojitosti tedy $z(t_0) \geq 0$, $z(t_1) \geq 0$ a levá strana v (4) je nekladná. Naproti tomu integrand napravo je nezáporný, spojitý a alespoň někde v (t_0, t_1) ostře kladný, tedy celkem kladný. To je spor. \square

Poznámky. ① Důkaz projde úplně stejně pro obecnější rovnice tvaru

$$(p(t)y')' + q(t)y = 0, \quad (5)$$

kde $p > 0$.

② Obecná rovnice 2. řádu

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$$

se dá převést na tvar (5) či (1) přinásobením vhodným „integračním faktorem“, nebo substitucí; viz cvičení 1 níže.

Příklad 1. Nechť y je netriviální řešení rovnice $y'' + (1 - t^2)y = 0$. Potom y má nejvýše tři nulové body.

Řešení: Označme $q(t) = 1 - t^2$. V intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, +\infty)$ je $q(t) \leq 0$. Tudíž obsahují nejvýše jeden nulový bod (viz cvičení 4 níže). – Naproti tomu v $[-1, 1]$ je $q(t) \leq 1$; tedy sousední nulové body jsou vzdáleny alespoň π (viz cvičení 3 níže). Pročež i sem se vejde nejvýše jeden.

Příklady na srovnávací větu.

1. Nechť $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Určete funkci $u = u(t)$ tak, aby při substituci $y = u(t)z$ měla rovnice pro z tvar $z'' + Q(t)z = 0$. Vyjádřete $Q(t)$ pomocí $p(t)$, $q(t)$.

2. Nulové body každého netriviálního řešení rovnice $y'' + py' + qy = 0$ tvoří izolovanou množinu. Speciálně: má smysl hovořit o „sousedních“ nulových bodech.

3. Nechť $y = y(t)$ je netriviální řešení rovnice $y'' + q(t)y = 0$, nechť $a > 0$ je pevné číslo, I je interval.

(i) jestliže $q(t) \geq a$ pro $t \in I$, pak sousední nulové body y ležící v I jsou vzdáleny nejvýše π/\sqrt{a} .

(ii) jestliže $q(t) \leq a$ pro $t \in I$, pak sousední nulové body y ležící v I jsou vzdáleny alespoň π/\sqrt{a} .

4. Nechť y je netriviální řešení rovnice $y'' + a(t)y = 0$, nechť $a(t) \leq 0$ pro každé t v intervalu I . Potom y má v I nejvýše jeden nulový bod. – Dokažte (i) pomocí Šturmovy věty (ii) na základě elementárních úvah.

5. Uvažujte rovnici $y'' + q(t)y = 0$ v intervalu $(K, +\infty)$, kde $K > 0$, $q(t) > 0$.

(i) jestliže $q(t) \leq \frac{1}{4t^2}$, pak netriviální řešení má nejvýše jeden nulový bod

(ii) jestliže $q(t) \geq \frac{1}{ct^2}$, kde $c < 4$, pak každé řešení má nekonečně nulových bodů

6. Každé řešení rovnice $y'' + \frac{1}{1+\sqrt{t}}y = 0$ má v intervalu $(0, +\infty)$ nekonečně nulových bodů.

7. Každé netriviální řešení rovnice $y'' + 2y'/t + e^t y = 0$ má v $(0, \infty)$ nekonečně nulových bodů. Rozdíl sousedních se blíží k 0 pro $t \rightarrow \infty$.

8. Každé netriviální řešení rovnice $ty'' + 2y' + (t + \sin t)y = 0$ má v $(0, \infty)$ nekonečně nulových bodů. Rozdíl sousedních se blíží k 1 pro $t \rightarrow \infty$.

9. Uvažujte po řadě rovnice:

(i) $y'' + t^2 y = 0$

(ii) $y'' + e^{2t} y = 0$

(iii)* $y'' + y/t = 0$

Nechť y je netriviální řešení, $t_0 \in (0, \infty)$ je nulový bod. Ukažte, že existuje nulový bod $t_1 > t_0$ a odvoďte co nejpřesnější (horní a dolní) odhad vzdálenosti $\Delta = t_1 - t_0$.

10. Ukažte, že netriviální řešení rovnice $y'' + (\sin t)y = 0$ má v intervalu $[-\pi, \pi]$ nejvýše dva nulové body.

11. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' - ty' + y = 0$ má v \mathbb{R} nejvýše pět nulových bodů.

12. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + t/2y' + y \operatorname{arctg} t = 0$ má v \mathbb{R} nejvýše čtyři nulové body.

13. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + e^t y' + e^t y/2 = 0$ má v \mathbb{R} nejvýše jeden nulový bod.

14. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' + 2ty' + 4ty = 0$ má v \mathbb{R} nejvýše čtyři nulové body.

Návody a výsledky.

1) $u = \exp(-\int p/2)$, $Q = -p^2/4 - p'/2 + q$.

2) Je-li t_0 hromadný bod množiny $\{t \in I; y(t) = 0\}$, pak $y(t_0) = 0$ ze spojitosti. Navíc $y'(t_0) = 0$, neboť $y'(t_0) \neq 0$ implikuje, že $y \neq 0$ na jistém $P(t_0)$. Pro rovnici 2. řádu podmínka $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ určuje triviální řešení, spor.

3) Srovnejte s $z'' + a^2z = 0$, kde řešení mají tvar $z_c(t) = \sin[a(t - c)]$.

4) Necht $t_0 < t_1$ jsou sousední nulové body y . (i) Každé řešení rovnice $z'' + 0z = 0$ by mělo v $[t_0, t_1]$ nulový bod – spor. (ii) BÚNO navíc $y > 0$ na (t_0, t_1) , ovšem pak y je konvexní v $[t_0, t_1]$, což není možné.

5) Srovnejte s Eulerovou rovnicí $t^2 z'' + dz = 0$, jejíž řešení má nekonečně nulových bodů pokud $d > 1/4$, a nemá obecně žádné nulové body, jestliže $d \leq 1/4$

6) Užijte předchozí bod (ii) předchozího cvičení na intervalu $(K, +\infty)$ pro vhodné velké $K > 0$

7) Substituce $y(t) = z(t)/t$ (viz cvičení 1) vede na rovnici $z'' + e^t z = 0$. Srovnejte s $w'' + a^2 w = 0$ pro velké a^2 a užijte cvičení 3.

8) Pomocí cvičení 1 převedte na rovnici $z'' + Q(t)z = 0$, kde $Q(t) = 1 + \sin t/t$. Užijte cvičení 3.

9) Aplikujeme výsledky cvičení 3. (i) $q(t) = t^2 \geq t_0^2$ na $[t_0, \infty)$, odtud $\Delta \leq \pi/t_0$. Naproti tomu $q(t) \leq (t_1)^2 \leq (t_0 + \pi/t_0)^2$ na $[t_0, t_1]$, tedy $\Delta \geq \pi/(t_0 + \pi/t_0)$. (ii) $q(t) = e^{2t} \geq e^{2t_0}$ na $[t_0, \infty)$, odtud $\Delta \leq \pi e^{-t_0}$. Naproti tomu $q(t) \leq e^{2t_1} \leq e^{2(t_0 + \pi e^{-t_0})}$ na $[t_0, t_1]$, tedy $\Delta \geq \pi e^{-(t_0 + \pi e^{-t_0})}$. (iii) $q(t) \leq 1/t_0$ na $[t_0, \infty)$, tedy $\Delta \geq \pi\sqrt{t_0}$. Ansatz: hledejme t_1 v intervalu $I := [t_0, t_0 + \pi\sqrt{t_0} + \delta]$, kde $\delta > 0$ je pevné. Protože $q(t) \geq 1/(t_0 + \pi\sqrt{t_0} + \delta)$ v I , je $t_1 - t_0 \leq \pi\sqrt{t_0 + \pi\sqrt{t_0} + \delta}$, což je (ospravedlnění Ansatzu!) menší než $\pi\sqrt{t_0} + \delta$ pro δ ne příliš malé.

10) Protože $q(t) = \sin t \leq 1$, je vzdálenost sousedních bodů alespoň π , viz

cvičení 3. Tedy tři nulové body mohou být pouze $-\pi$, 0 a π . Leč $q(t) \leq 0$ v $[-\pi, 0]$, pročež tento interval obsahuje nejvýše jeden nulový bod (cvičení 4) – spor.

11) Pomocí cvičení 1 převedte na $z'' + q(t)z = 0$, kde $q(t) = 3/2 - t^2/4$. Na intervalech $(-\infty, -\sqrt{6}]$, $[\sqrt{6}, +\infty)$ je $q(t) \leq 0$, tedy obsahují nejvýše po jednom nulovém bodu (viz cvičení 4). Na $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ je $q(t) \leq 3/2$; odtud (a díky cvičení 3ii) se sem vejdou nejvýše dva.

12) Pomocí cvičení 1 převedte na $z'' + q(t)z = 0$, kde $q(t) = \arctg t - 1/4 - t^2/16$. Protože $\arctg t \leq \pi/2$, a dokonce ≤ 0 pro $t \leq 0$, je $q(t) \leq 0$ mimo $[0, M]$ a $q(t) \leq \pi/2$ na $[0, M]$, kde $M = 4\sqrt{\pi/2 - 1/4}$. Dále jako v předchozím cvičení.

13) Užijte cvičení 1 (vyjde $Q = -e^{2t}/2$) a cvičení 4.

14) Pomocí cvičení 1 převedte na $z'' + q(t)z = 0$, kde $q(t) = -t^2 + 4t - 1$. Tedy $q(t) \leq 3$ na $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$, kam se tudíž vejdou nejvýše dvě nuly díky cvičení 3, zatímco $q \leq 0$ mimo tento interval a užijeme cvičení 4.

Aplikace – nulové body Besselovy funkce.

Pomocí srovnávací věty se dá určit asymptotické rozložení nulových bodů Besselovy funkce v okolí nekonečna.

Definice. Besselovou funkcí 1. druhu (s indexem $s \in \mathbb{R}$) rozumíme

$$J_s(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+s+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.$$

Řada konverguje (s konvencí $1/\Gamma(-n) = 0$) pro $t \in (0, \infty)$ a splňuje zde Besselovu rovnici

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - s^2) y = 0. \quad (1)$$

Věta. Funkce $J_s(t)$ má v $(0, \infty)$ nekonečně nulových bodů. Vzdálenost sousedních se blíží k π pro $t \rightarrow \infty$.

Nejprve si dokážeme pomocné lemma.

Lemma. Nechť z je netriviální řešení rovnice

$$z'' + q(t)z = 0$$

(i) je-li $q(t) \geq a^2$ pak sousední nulové body z jsou vzdáleny nejvýše π/a .

(ii) je-li $q(t) \leq a^2$ pak sousední nulové body z jsou vzdáleny alespoň π/a .

Důkaz Lemmatu. Funkce $y_c(t) = \sin a(t - c)$ je (netriviální) řešení rovnice

$$y'' + a^2 y = 0, \quad (2)$$

vzdálenost sousedních kořenů je přesně π/a .

Ad (i): sporem — nechť sousední nulové body $t_0 < t_1$ funkce z jsou dále než π/a . Vhodnou volbou c dostaneme do intervalu (t_0, t_1) alespoň dva nulové body $\eta_0 < \eta_1$ funkce y_c . Podle srovnávací věty má z v $[\eta_0, \eta_1]$ kořen – spor.

Ad (ii): podobně — nechť $t_0 < t_1$ jsou sousední nulové body z , vzdálené méně než π/a . Dle srovnávací věty má každé řešení rovnice (2) v $[t_0, t_1]$ kořen. Avšak funkce y_c je při vhodném c nenulová dokonce na okolí $[t_0, t_1]$ – spor.

□

Důkaz Věty. Substitucí $y(t) = t^{-1/2} z(t)$ přejdeme k rovnici

$$\begin{aligned} t^{3/2} z'' + \left(t^2 - s^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) t^{-1/2} z &= 0 \\ z'' + \underbrace{\left(1 + \frac{1/4 - s^2}{t^2}\right)}_{q(t)} z &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Zřejmě $z(t)$ má stejné kořeny jako $y(t) = J_s(t)$, a pozorujeme, že $q(t) \rightarrow 1$ pro $t \rightarrow \infty$.

Nechť $\varepsilon \in (0, 1)$ je dáno. Zvolme $K > 0$ tak, že

$$(1 - \varepsilon)^2 < q(t) < (1 + \varepsilon)^2, \quad \forall t > K.$$

Podle Lemmatu je vzdálenost sousedních kořenů y v intervalu (K, ∞) větší než $1 - \varepsilon$ a menší než $1 + \varepsilon$. Speciálně je jich zde nekonečně mnoho. □

Poznámka. Z rovnice (3) a Lemmatu také ihned vidíme:

- (i) $|s| \leq 1/2 \implies$ sousední kořeny J_s jsou vzdáleny nejvýše π
- (ii) $|s| \geq 1/2 \implies$ sousední kořeny J_s jsou vzdáleny alespoň π