Logaritmus matice – definice křivkovým integrálem.

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Potom

$$\operatorname{Ln} z = \int_0^1 \frac{z-1}{1+\tau(z-1)} d\tau$$

nazýváme *hlavní větev logaritmu* z. Integrand je spojitý díky předpokladu $z \notin (-\infty, 0]$. Identitu $\exp \operatorname{Ln} z = z$ (inverzní formuli) dokážeme snadno následovně: definujme pomocné funkce

$$x(t) = \int_0^t \frac{z-1}{1+\tau(z-1)} d\tau$$
$$y(t) = e^{-x(t)}(1 + t(z-1))$$

Jest $x(0) = 0$, $x(1) = \operatorname{Ln} z$ a $x'(t) = \frac{z-1}{1+t(z-1)}$ pro $t \in (0,1)$. Odtud snadno $y'(t) = 0$ tamtéž, tedy $y(0) = y(1) = 1$, což je hledaný závěr. Naším cílem je zobecnit tento postup pro matice.

Poznámka. V terminologii komplexní analýzy $\operatorname{Ln} z = \int_\varphi \frac{d\zeta}{\zeta}$, kde φ je úsečka od 1 do z. Předpoklad $z \notin (-\infty, 0]$ zaručuje, že φ neprochází počátkem.

Definice. Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazve *přípustná*, jestliže $\lambda \notin (-\infty, 0]$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$. Pro A přípustnou definujeme

$$\operatorname{Ln} A = \int_0^1 (A - I)(I + \tau(A-I))^{-1} d\tau \tag{1}$$

I. korektnost definice.
(a) ukažte, že $(I-Q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$ pro $\|Q\| < \delta$, kde $\delta < 1$, navíc řada vpravo konverguje stejnoměrně
(b) dedukujte odsud, že množina invertibilních matic je otevřená a funkce $A \mapsto A^{-1}$ je spojitá (návod: je-li A invertibilní a B má malou normu, pak $(A+B)^{-1} = (A(I+A^{-1}B))^{-1}$ a užijte předchozí bod
(c) ukažte konečně, že pro přípustnou A je integrand v (1) spojitý vůči τ dokonce na nějaké otevřené nadmnožině $[0,1]$

II. inverzní formule. Definujme pomocnou funkci

$$X(t) = \int_0^t (A - I)(I + \tau(A-I))^{-1} d\tau \qquad t \in [0,1] \tag{2}$$

Z výše ukázané spojitosti integrandu snadno vyplývá, že $X(t)$ je C^1 funkce a $X'(t) = (A-I)(I+t(A-I))^{-1}$.
(i) ukažte, že $\big(X^n(t)\big)' = nX^{n-1}(t)X'(t)$ (návod: důležité je, že $X(t)$, $X(t+h)$, $X'(t)$ komutují)
(ii) ukažte, že $\exp(-X(t))' = -X'(t)\exp(-X(t))$, neboť lze derivovat člen po členu (proč?)
(iii) ukažte konečně, že $Y(t) = (I + t(A-I))\exp(-X(t))$ je konstantní na $[0,1]$

III. zobecnění a nejednoznačnost.
(i) ukažte, že pro *libovolnou regulární* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existuje (dokonce nespočetně mnoho) $\delta \in \mathbb{R}$ takových, že $e^{i\delta}A$ je přípustná. Zjevně pak exponenciála $\mathrm{Ln}(e^{i\delta}A) - i\delta I$ je A.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}^n$ je vektor s jednotkovou velikostí. Potom

$$H = I - 2c(c^{\mathrm{T}})$$

se nazývá *Householderova matice.* – Vektory chápeme standardně jako *sloupcové*, tedy (maticový) součin $c(c^{\mathrm{T}})$ je matice $n \times n$; její hodnost je zřejmě 1.

(ii) ukažte, že (předpokládejme $n > 1$) $\sigma(H) = \{-1, 1\}$ – inkluze $\subset$ plyne snadno z identity (dokažte!) $H^2 = I$; k opačné inkluzi si připomeňte vztah spektra a stopy matice, nebo zkuste nalézt přímo vlastní vektory H
(iii) konečně $e^{i\pi/2}H$ je přípustná, tedy můžeme definovat

$$K := \mathrm{Ln}(e^{i\pi/2}H) - \frac{i\pi}{2}I$$

Z předchozího $\exp(K) = H$ a $\exp(2K) = (\exp K)^2 = I$. Pro různá H jsou též K navzájem různé (proč?) tedy existuje nespočetně mnoho „logaritmů I“; také existuje nespočetně mnoho „druhých odmocnin I“.

Poznámka. Srovnejme se skalární situací ($n = 1$): $\exp(z) = 1$ pro nějaké $z \in \mathbb{C}$, právě když $z = 2k\pi i$, kde k je celé. Podobně $z^2 = 1$ pro $z \in \mathbb{C}$, právě když $z = 1$ nebo $z = -1$.

IV. rozvoj do řady. Předpokládejme navíc, že integrand v (1) lze rozvést do řady,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(A-I)^{k+1}\tau^k \tag{3}$$

a nechť tato řada konverguje *stejnoměrně* pro $\tau \in [0,1]$. (To je zaručeno například pokud $\|A-I\| < 1$ nebo pokud $A-I$ je nilpotentní.) Tedy lze integrovat člen po členu a dostáváme

$$\mathrm{Ln}\,A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}(A-I)^{k+1} \tag{4}$$

Jde zřejmě o zobecnění Taylorovy řady pro logaritmus v jednotkovém okolí 1.