Variace konstant 3x (jen zdánlivě) jinak

Pod názvem ,,variace konstant" se v literatuře vyskytují někdy zdánlivě odlišná tvrzení. Níže formulujeme tři varianty; první dokážeme, druhou a třetí pak převedeme na první, čímž bude jasná souvislost.
Všechny věty lze dokazovat i přímo dosazením tvaru řešení do příslušné rovnice, což ale považujeme za méně poučné.

Věta 1. Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice soustavy $x' = A(t)x$, nechť $b(t) \in \mathbb{R}^n$ je dáno. Potom funkce

$$x(t) = \Phi(t)c(t), \tag{1}$$

je partikulární řešení soustavy $x' = A(t)x + b(t)$, právě když

$$\Phi(t)c'(t) = b(t) \tag{2}$$

Důsledek. Řešení soustavy $x' = A(t)x + b(t)$ s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ lze zapsat ve tvaru

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)\,ds \tag{3}$$

Věta 2. Nechť funkce $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ tvoří fundamentální systém rovnice

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0 \tag{4}$$

Nechť funkce $c_1(t), \dots, c_n(t)$ vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}
c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) + \dots c_n'(t)y_n(t) &= 0\\
c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) + \dots c_n'(t)y_n'(t) &= 0\\
&\vdots\\
c_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + c_2'(t)y_2^{(n-2)}(t) + \dots c_n'(t)y_n^{(n-2)}(t) &= 0\\
c_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)y_2^{(n-1)}(t) + \dots c_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) &= \frac{f(t)}{a_0(t)}\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Potom funkce

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t) \tag{6}$$

je řešením rovnice

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = f(t) \tag{7}$$

Věta 3. Definujme ,,řešicí funkci" $\varphi(t, t_0) = y(t)$, kde $y(t)$ je řešením rovnice (4) s počátečními podmínkami $y(t_0) = 0$, $y'(t_0) = 0$, $\dots$, $y^{(n-2)}(t_0) = 0$ a $y^{(n-1)}(t_0) = 1$. Potom funkce

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(t, s)\frac{f(s)}{a_0(s)}\,ds \tag{8}$$

je řešením rovnice (7) s nulovými počátečními podmínkami v bodě t_0.

Důkaz Věty 1. Funkce tvaru (1) se derivuje jako $x'(t) = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t)$, a rovnice je tedy splněna právě když

$$\Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + b(t)$$

Protože $\Phi(t)$ je fundamentální matice, první člen nalevo a první člen napravo se vyruší, a dostáváme (2).

Důkaz Důsledku. Z (2) snadno plyne $c(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,ds$; pokud chceme $x(t_0) = x_0$, je nutno volit $c_0 = \Phi^{-1}(t_0)x_0$.

Důkaz Věty 2. Použijeme d'Alembertovu transformaci, která (skalární) funkci $y(t)$ přiřazuje vektor $x(t) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))^T$. Potom $y(t)$ je řešení (7), právě když $x(t)$ vyhovuje soustavě

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}x_1 \cdots - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}x_n + \frac{f(t)}{a_0(t)} \end{aligned}$$

To můžeme zapsat maticově jako $x' = D(t)x + b(t)$, kde matice $D(t)$ je nulová kromě jedniček nad hlavní diagonálou a posledního řádku, jenž má tvar $(-a_1(t)/a_0(t), \ldots, -a_n(t)/a_0(t))^T$ a (vektorová) funkce $b(t)$ je rovna $(0, \ldots, 0, f(t)/a_0(t))^T$.

Funkce $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ tvoří fundamentální systém rovnice (4) je ekvivalentní tvrzení, že

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je fundamentální maticí pro $x' = D(t)x$. Podle Věty 1 je $x(t) = \Phi(t)c(t)$ partikulární řešení, právě když $\Phi(t)c'(t) = b(t)$. Ovšem to po rozepsání na složky je právě systém rovnic (5). Vezmeme-li první složku vektoru $x(t)$ (tj. vlastně provedeme inverzní d'Alembertovu transformaci), pak dostáváme řešení ve tvaru (6), čímž je důkaz hotov.

Důkaz Věty 3. Podobně jako v důkazu Věty 2 použijeme d'Alembertovu transformaci, přičemž řešení soustavy $x' = D(t)x + b(t)$ nyní vyjádříme vzorečkem (3). Nulové počáteční podmínky v bodě t_0 znamenají $x_0 = 0$ a zbývá si rozmyslet integrál.

Víme, že $\Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ je fundamentální matice soustavy $x' = D(t)x$, která je navíc rovna I pro $t = s$. Protože vektor $b(s)$ je nulový vyjma poslední složky, jež je rovna $f(s)/a_0(s)$, integrujeme jen poslední sloupec matice $\Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ krát (skalární) funkce $f(s)/a_0(s)$. A opět nás zajímá jenom $x_1(t) = y(t)$, první složka, tedy prvek na pozici $1, n$ matice $\Phi(t)\Phi^{-1}(s)$. To však není nic jiného než $y(t)$ řešení s počátečními podmínkami $y(s) = 0$, $y'(s) = 0$, $\ldots y^{(n-2)}(s) = 0$ a $y^{(n-1)}(s) = 1$, jež jsem označili jako $\varphi(t, s)$, a tím je důkaz hotov.