Věta 7.1: důkaz

pomocné úvahy: $\varphi(t,t_0,x_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$; $\forall t,t_0 \in I$; $x_0 \in \mathbb{R}^n$

(ú1) $|Ay| \le c_1 \quad \forall |y| \le c_2 \Rightarrow \|A\| \le \frac{c_1}{c_2}$

než: $y = c_2 x$; $|x| \le 1$; tj. $|c_2 A x| \le c_1 \quad \forall |x| \le 1$

$$|Ax| \le \frac{c_1}{c_2} \quad \forall |x| \le 1$$

tj. $\|A\| \le \frac{c_1}{c_2}$.

(ú2) $|ABx| \le c_1 \quad \forall |x| \le c_0$; B regulární $\Rightarrow \|A\| \le \frac{c_1}{c_0}\|B^{-1}\|$

než $Bx = y$; známe: y vyplní $\frac{c_0}{\|B^{-1}\|}$-kouli:

$|y| \le \frac{c_0}{\|B^{-1}\|}$ dáno: $y = B(\underbrace{B^{-1}y}_{x})$; $|\underbrace{B^{-1}y}_{x}| \le \|B^{-1}\| \cdot |y| \le c_0$.

dle (ú1): $\|A\| \le \frac{c_1}{c_0/\|B^{-1}\|} = \frac{c_1}{c_0}\|B^{-1}\|$.

---

1. „⇐": $|\varphi(t,t_0,x_0)| = |\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0| \le \|\Phi(t)\| \cdot \|\Phi(t_0)^{-1}\| \cdot |x_0|$

t_0 fix. víme: $\|\Phi(t)\| \le C$; tj. $\varepsilon > 0$ dáno: stačí volit

$$\delta < \frac{\varepsilon}{C\|\Phi^{-1}(t_0)\|}.$$

„⇒": volím $\varepsilon = 1$; tj. $\exists \delta > 0$ t.ž.
t_0 fix.

$$|\varphi(t,t_0,x_0)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| < 1$$

$$\forall t \ge t_0 \qquad \forall |x_0| < \delta$$

dle (ú2): $\|\Phi(t)\| \le \frac{1}{\delta}\|(\Phi^{-1}(t_0))^{-1}\| = \frac{\|\Phi(t_0)\|}{\delta} = C$

2. „$\Leftarrow$": víme: $\|\Phi(t)\| \to 0$, $t \to +\infty$

cíl: 0 stabilní (i) & lok. atraktor (ii)

ad (i) jistě $t \mapsto \|\Phi(t)\|$ spojité na I; tj. $\|\Phi(t)\|$ omez. na $(t_0, +\infty)$, $\forall t_0$ pevné; dle 1$\Leftarrow$ ... stabilita

ad (ii) $|\varphi(t, t_0, x_0)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq \|\Phi(t)\| \cdot |\Phi^{-1}(t_0)x_0| \to 0$

$t \to +\infty$; $\forall t_0, x_0$ pevné: dokonce globální atraktor

---

„$\Rightarrow$" víme: $|\varphi(t, t_0, x_0)| \to 0$; $\forall t_0$, $|x_0| < \eta$ pevné

linearita: dokonce pro $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

cíl: $\|\Phi(t)\| \to 0$, $t \to +\infty$.

$\varepsilon > 0$ dáno: e_i .. bázový vektor .. $\exists t_i > t_0$ t.ž.

$$|\varphi(t, t_0, e_i)| < \frac{\varepsilon}{n \cdot \|\Phi(t_0)\|} \; ; \; \forall t \geq t_i$$

nechť $|x_0| \leq 1$ je libovolné; tj. $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$; $|\alpha_i| \leq 1$

nechť $t \geq T := \max\{t_1, \dots, t_n\}$.

$$|\varphi(t, t_0, x_0)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(t, t_0, e_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, |\varphi(t, t_0, e_i)|$$

$$\leq n \cdot \frac{\varepsilon}{n \|\Phi(t_0)\|}$$

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq \frac{\varepsilon}{\|\Phi(t_0)\|} \quad \forall |x_0| \leq 1, \; t \geq T$$

(viz 2) ... $\|\Phi(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|\Phi(t_0)\|} \cdot \|\Phi(t_0)\| = \varepsilon$; $\forall t \geq T$.

3. „$\Leftarrow$": víme: $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \le C \quad \forall\, t \ge s \in I$

cíl: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ |x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \ \forall t \ge t_0 \in I$

tedy: $|\varphi(t, t_0, x_0)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \le \underbrace{\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\|}_{< C} \cdot |x_0|$

tj. $\varepsilon > 0$ dáno: vol $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$.

„$\Rightarrow$": užij $\varepsilon = 1$ .. $\exists \delta > 0$ t.ž. $|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \le 1 \quad \forall |x_0| \le \delta$

tj. dle (2i): $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \le \dfrac{1}{\delta}$; $\forall\, t \ge t_0 \in I$.

---

4. „$\Leftarrow$": víme: $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \le C e^{-\alpha(t-s)} \quad \forall\, t \ge s \in I$

cíl: unif. stab. & $|x_0| < \eta \Rightarrow \varphi(t_0 + T, t_0, x_0) \to 0$,
(i) $T \to +\infty$ stejnoměrně
$|x_0| \le \eta$, $t_0 \in I$
(ii)

(i) zřejmě $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \le C \quad \forall t \ge t_0 \in I$

užij 3. „$\Leftarrow$"

(ii) $|\varphi(t_0 + T, t_0, x_0)| = |\Phi(t_0 + T)\Phi^{-1}(t_0)x_0|$

$\le \|\Phi(t_0 + T)\Phi^{-1}(t_0)\| \cdot |x_0| \le C e^{-\alpha T} |\eta| \to 0 \ ; T \to +\infty$

nezávisle na daných t_0, x_0.

4 „⇒": nechť $\varphi(t_0+T, t_0, x_0) \to 0$; $T \to \infty$, stejnoměrně

$|x_0| \le \eta$, $t_0 \in I$

cíl: $\exists\, C, \alpha > 0$ t.ž. $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \le C e^{-\alpha(t-s)}$

$\forall t \ge s \in I$.

volme $T > 0$ t.ž. $|\varphi(t_0+T, t_0, x_0)| \le \frac{1}{2}\eta$; $\forall t_0 \in I$; $|x_0| \le \eta$

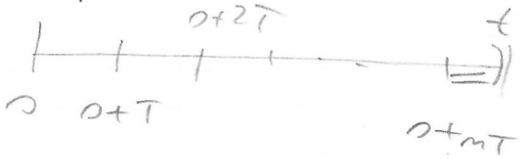
$$|\Phi(t_0+T)\Phi^{-1}(t_0)\, x_0| \le \frac{1}{2}\eta \; ; \forall |x_0| \le \eta$$

dle (ii) .. (*) $\|\Phi(t_0+T)\Phi^{-1}(t_0)\| \le \frac{1}{2} = e^{-\tilde{\alpha}}$; $\tilde{\alpha} = \ln 2 > 0$.

$t_0 \in I$ libovolné.

nechť $t > s \in I$ jsou libovolné..

lze psát: $t = s + mT + t_1$; $m \ge 0$ celé, $t_1 \in [0, T)$



$$\Phi(t)\Phi^{-1}(s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s+mT) \cdot \Phi(s+mT)\Phi^{-1}(s+(m-1)T) \cdots$$

$$\cdots \Phi^{-1}(s+T)\,\Phi(s+T) \cdot \Phi(s)$$

$$= \underbrace{\Phi(t)\Phi^{-1}(s+mT)}_{\|\cdot\| \le C_0 \text{ .. unif. omez.; 3} \Rightarrow} \cdot \prod_{j=1}^{m} \underbrace{\Phi(s+jT)\Phi^{-1}(s+(j-1)T)}_{\|\cdot\| \le e^{-\tilde{\alpha}} \text{ dle } (*)}$$

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \le C_0 e^{-\tilde{\alpha} m} = C_0 e^{-\tilde{\alpha}\left(\frac{t-s}{T}\right) + \tilde{\alpha}\frac{t_1}{T}} \quad \frac{t_1}{T} \le 1$$

$$\le C \cdot e^{-\alpha(t-s)} \; ; \text{ kde } C = C_0 e^{\tilde{\alpha}} = 2C_0$$

$$\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{T} = \frac{\ln 2}{T}.$$