Metoda charakteristik

1) hledáme: $u = u(x)$, $x \in \mathcal{U}_{\xi_0}$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$

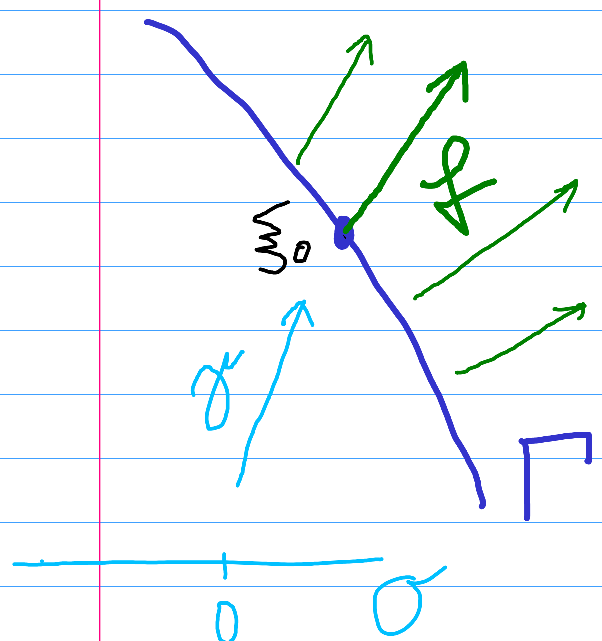
$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} f_j(x,u) &= g(x,u) \\ u &= u_0 \text{ na } \Gamma \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Γ ... nadplocha

2) předpoklady:

$f, g \in C^1$ na okolí $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\eta_0 = u_0(\xi_0)$



klíčová podmínka:

$$f(\xi_0, \eta_0) \notin T_\Gamma(\xi_0)$$

„transverzalita"

aneb:

necharakteristická (nad)plocha

Nechť $\gamma : \mathcal{O} \longrightarrow \Gamma$ ... parametrizace Γ

$$\lambda \longmapsto \gamma(\lambda)$$

$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ... okolí nuly, BÚNO: $\gamma(0) = \xi_0$

3) charakteristický systém:

$$(2)\ \begin{cases} x' = f(x,u), & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ u' = g(x,u), & u(0) = u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\therefore$ řešící funkce:

$$x(t) = \varphi(t, x_0, u_0)$$
$$u(t) = \chi(t, x_0, u_0)$$

4) klíčová úvaha: pokud $U = U(x)$ splňuje

$$(*) \quad U(x(t)) = u(t), \quad t \in I$$

„podél řešení" (2)

pak U splní rovnici (1)$_1$

(v bodě $x = x(t)$ pro $\forall t$)

dk) aplikuji $\frac{d}{dt}$ na $(*)$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_j}(x(t))\, x_j'(t) = u'(t)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_j}(x(t))\, f_j(x(t), \underbrace{u(t)}_{U(x(t))}) = g(x(t), \underbrace{u(t)}_{U(x(t))})$$

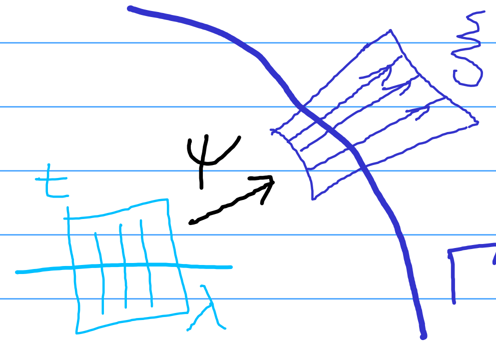
$\Rightarrow$ splnění rovnice v bodě $x = x(t)$, $\forall t \in I$

$\nu(t,\lambda) = (t, \gamma(\lambda), U_0(\gamma(\lambda)))$

5) pomocné funkce: $\Psi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_{\xi_0}$

$$(t,\lambda) \mapsto \varphi(\nu(t,\lambda))$$

VoIF



$\exists\, \Psi_{-1} : \mathcal{U}_{\xi_0} \to \mathcal{U}_0$

- $\Psi(0) = \varphi(0, \xi_0, \eta_0) = \xi_0$
- $\Psi \in C^1$ (složení C^1 fcí)
- $\nabla\Psi(0) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulární?

$\nabla = (\partial_t, \nabla_\lambda)$, kde $\partial_t \varphi(0) = f(\xi_0, \eta_0)$

$$\nabla_\lambda \varphi(0) = \underbrace{\nabla_\lambda \gamma(0)}$$

plná hodnost $\Leftarrow$ klíčová podmínka generuje $T_\Gamma(\xi_0)$

6) řešení: polož $u(\xi) = \chi(\nu(\Psi_{-1}(\xi)))$ $\xi \in \mathcal{U}_{\xi_0}$

- $u \in C^1$
- splní $(*)$ a tedy $(1)_1$ na $\mathcal{U}_{\xi_0}$
- počáteční podmínka $(1)_2$ ...?

$\xi \in \Gamma \cap \mathcal{U}_{\xi_0} \Rightarrow \Psi_{-1}(\xi) = (0, \lambda)$, kde $\gamma(\lambda) = \xi$

$$u(\xi) = \chi(0, \gamma(\lambda), U_0(\gamma(\lambda))) = U_0(\xi)$$