Studujeme rovnici

$$x' = f(x,t) \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

pro neznámou funkci $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$. Zajímá nás, za jakých okolností je příslušná řešicí funkce $\varphi(t; t_0, x_0)$ diferencovatelná vůči x_0; a zda tato derivace splňuje „rovnici ve variacích“

$$u' = \big[\nabla_x f(x(t), t)\big] u \qquad u(t_0) = w \tag{2}$$

kde $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0)$ a w je směr, v němž derivaci dle x_0 počítám.

Předpokládejme, že $f = f(x,t)$ je C^1. Dle klasické teorie je φ dobře definovaná, (lokálně) lipschitzovská vůči x_0. Při pevném t_0, x_0 a malém $h > 0$ označíme

$$x(t) = \varphi(t; t_0, x_0) \tag{3}$$

$$y(t) = \varphi(t; t_0, x_0 + hw) \tag{4}$$

$$\eta(t) = \frac{x(t) - y(t)}{h} - u(t) \tag{5}$$

kde $u(t)$ je řešení (2); též dobře definované, neboť matice soustavy

$$A(t) = \nabla_x f(x(t), t) \tag{6}$$

je spojitá v t. Ukážeme, že $\eta(t) \to 0$ pro $h \to 0$ a to dokonce stejnoměrně vůči $t \in [t_0, t_1]$, kde $t_1 > t_0$ je libovolné, pevné.
V celém důkazu t_0, t_1, x_0, w jsou pevné a BÚNO předpokládáme, že $h > 0$ je tak malé, že grafy $x(t)$, $y(t)$ se nachází v nějakém kompaktu $\mathcal{K}$, na kterém platí: $|f| \le c_0$,

$$\|\nabla_x f\| \le c_1 \tag{7}$$

a také $f(x,t)$ je globálně L-lipschitzovská vůči x. Z posledního také máme

$$|x(t) - y(t)| \le c_2 |h|, \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{8}$$

Vyjádříme přírůstek:

$$f(y(t),t) - f(x(t),t) = \int_0^1 \Big[\nabla_x f\big(x(t) + \theta(y(t) - x(t)), t\big) d\theta\Big] \, (y(t) - x(t)) \tag{9}$$

Odsud rovnice pro η:

$$\eta'(t) = \big[\nabla_x f(x(t),t)\big]\eta(t) + \int_0^1 \Big[\nabla_x f(x(t) + \theta(y(t) - x(t)), t) - \nabla_x f(x(t), t)\Big] d\theta \, \frac{y(t) - x(t)}{h} \tag{10}$$

Nyní $\eta(t) \to 0$ pro $h \to 0$ plyne snadno z Gronwalla : $(x(t) - y(t))/h$ je omezené, integrál $\int_0^1 [\ldots] d\theta$ jde to nuly (spojitost funkce $\nabla_x f$); vše stejnoměrně vůči $t \in [t_0, T]$.

Podrobněji provedeno: označme poslední integrand jako $g(\theta, t, h)$. Integrální tvar rovnice pro η je (neboť $\eta(t_0) = 0$)

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} \big[\nabla_x f(x(s), s)\big]\eta(s)ds + \int_{t_0}^{t}\int_{0}^{1} g(\theta, s, h)d\theta ds, \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{11}$$

Odsud pomocí odhadu (viz (7)) a označení

$$|\big[\nabla_x f(x(s), s)\big]\eta(s)| \leq \|\nabla_x f(x(s), s)\||\eta(s)| \leq c_1|\eta(s)| \tag{12}$$

$$K(h) := \sup_{t\in[t_0,t_1]} \int_{t_0}^{t}\int_{0}^{1} |g(\theta, s, h)|d\theta ds \tag{13}$$

dostáváme

$$|\eta(t)| \leq \int_{t_0}^{t} c_1|\eta(s)|ds + K(h), \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{14}$$

Odsud dle Gronwallova lemmatu

$$|\eta(t)| \leq K(h)\exp(c_1|t - t_0|), \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{15}$$

a jsme hotovi, ukážeme-li, že $K(h) \to 0$ pro $h \to 0$. K tomu stačí uvážit, že

$$K(h) = \int_{t_0}^{t_1} |g(\theta, s, h)|d\theta ds$$

přičemž integrand jde do nuly bodově, tj. pro pevné θ, s (viz (8) a spojitost f vůči x). Záměnu limity ověříme snadno z Lebesgueovy věty – integrand je omezený konstantou (viz (7), (8)).