1 Existence řešení.

Úmluva. Budeme studovat systém rovnic
$$x' = f(x,t) \tag{1.1}$$
za trvalého předpokladu $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá.

Definice. Řešením (1.1) v Ω rozumíme dvojici (x, I), kde $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a pro $\forall t \in I$ platí : (i) $(x(t), t) \in \Omega$, (ii) existuje (vlastní) $x'(t)$ a (iii) $x'(t) = f(x(t), t)$.

Poznámka. Takto definované řešení je nutně C^1 („klasické řešení“). Platí princip „nalepování“: je-li $x(t)$ řešení na (a, t_0) a na (t_0, b), spojité v $t = t_0$, pak je již řešení na (a, b).

Lemma 1.1. [O integrální formulaci.] Nechť $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce, $(x(t), t) \in \Omega$ pro každé $t \in I$; $t_0 \in I$ pevné. Potom je ekvivalentní :
1. (x, I) je řešení (1.1), splňující $x(t_0) = x_0$
2. pro každé $t \in I$ platí $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$

Věta 1.1. [Peano]. Je-li $(x_0, t_0) \in \Omega$, pak existuje $\delta > 0$ a $x(t) : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$ řešení (1.1) v Ω, splňující $x(t_0) = x_0$.

Věta 1.2. [Arzelo-Ascoli.] Nechť funkce $x_n(t)$ jsou stejně omezené a stejně spojité na $[0, T]$. Potom z nich lze vybrat stejnoměrně konvergující podposloupnost.

Poznámka. Je-li f spojitá a *omezená* v $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$, pak řešení existuje dokonce *globálně*, tj. pro $t \in \mathbb{R}$. Příklad rovnice $x' = \exp(x)$, $x(0) = 2$, jejíž (jediné) řešení $x(t) = \ln(1/(e^{-2} - t))$ nelze pokračovat za $t = e^{-2}$, ukazuje, že obecně je existence zaručena pouze *lokálně*.

2 Jednoznačnost řešení.

Definice. Řekneme, že rovnice (1.1) má v Ω vlastnost *globální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení (x, I), (y, J), splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$, platí $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cap J$.
Řekneme, že rovnice (1.1) má v Ω vlastnost *lokální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení (x, I), (y, J), splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$, existuje $\delta > 0$ tak že $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cap J \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.1. Rovnice (1.1) má v Ω vlastnost globální jednoznačnosti, právě když zde má vlastnost lokální jednoznačnosti.

Definice. Funkce f se nazve lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω, jestliže : pro každé $(x_0, t_0) \in \Omega$ existují L a $\delta > 0$ tak, že $|f(x, t) - f(y, t)| \le L|x - y|$ pro (x, t), $(y, t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.2. Nechť f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω. Potom rovnice (1.1) má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti.

Definice. $f \in C^1_x(\Omega)$ značí, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existují a jsou spojité v Ω, pro každé i.

Lemma 2.1. Nechť $f \in C^1_x(\Omega)$. Potom f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω.

Důsledek. Nechť $f \in C^1_x(\Omega)$. Potom rovnice (1.1) má v Ω vlastnost globální jednoznačnosti.

3 Maximální řešení

Poznámka. Připomeňme, že „řešením“ rozumíme vždy řešení rovnice (1.1) v $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ve smyslu výše uvedené definice a jí předcházející úmluvy.

Definice. Řešení $(\hat{x}, \hat{I})$ se nazve prodloužením řešení (x, I), jestliže $\hat{I} \supset I$ a $\hat{x}(t) = x(t)$ pro každé $t \in I$.
Řešení (x, I) se nazve *maximální*, jestliže nemá žádné netriviální (tj. $\hat{I} \supsetneqq I$) prodloužení.

Věta 3.1. Každé řešení má alespoň jedno maximální prodloužení.

Lemma 3.1. Řešení (x, I), kde $I = (a, b)$, lze prodloužit za bod b, právě když platí : (i) $b < \infty$ (ii) existuje $\lim_{t\to b-} x(t) =: x_0 \in \mathbb{R}^n$ a (iii) $(x_0, b) \in \Omega$.

Věta 3.2. [O opuštění kompaktu.] Nechť $\mathcal{K} \subset \Omega$ je kompaktní množina, nechť (x, I) je maximální řešení, splňující $(x(t_0), t_0) \in \mathcal{K}$. Potom existují $t_1 > t_0$ a $t_2 < t_0$ takové, že $(x(t_1), t_1) \notin \mathcal{K}$ a $(x(t_2), t_2) \notin \mathcal{K}$.

Důsledek. Nechť (x, I), $I = (a, b) \ni 0$, je maximální řešení *autonomní* rovnice $x' = f(x)$, kde $f : \mathcal{O} :\to \mathbb{R}^n$ je spojitá; nechť $x(0) \in K$, kde $K \subset \mathcal{O}$ je kompaktní. Potom buď $b = \infty$, nebo existuje $t_1 \in (0, b)$ takové, že $x(t_1) \notin K$. Podobně buď $a = -\infty$, nebo existuje $t_2 \in (a, 0)$ takové, že $x(t_2) \notin K$.

4 Závislost na počáteční podmínce

Věta 4.1. [Gronwallovo lemma.] Nechť $w(t)$, $g(t)$ jsou nezáporné, spojité na intervalu I, nechť $t_0 \in I$, $K \geq 0$. Nechť pro každé $t \in I$

$$w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds \right|$$

Potom pro každé $t \in I$

$$w(t) \leq K \exp \left(\left| \int_{t_0}^{t} g(s)ds \right| \right)$$

Lemma 4.1. Nechť f je (globálně) L-lipschitzovská v Ω vůči x. Potom pro libovolná dvě řešení (x, I), (y, J) v Ω a body t, $t_0 \in I \cap J$ platí

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t_0) - y(t_0)| \exp(L|t - t_0|)$$

Definice. [„Řešicí funkce“]. Nechť f je spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω. Potom definujeme $\varphi : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\varphi(t, t_0, x_0) = x(t)$, $t \in I$, kde (x, I) je (jediné, maximální) řešení rovnice (1.1) v Ω s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.

Věta 4.2. Za předpokladů předchozí definice je

$$\mathcal{D} = \left\{ (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2};\ \varphi(t, t_0, x_0) \text{ má smysl } \right\}$$

otevřená a $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá.

Důsledek. Je-li $f = f(x, t, p)$ spojitá a navíc lokálně lipschitzovská vůči x a p, závisí řešení $x' = f(x, t, p_0)$, $x(t_0) = x_0$ spojitě (a má otevřený definiční obor) vzhledem t, t_0, x_0 i p_0. Užitečný trik : přidáme „falešnou“ rovnici $p' = 0$, $p(t_0) = p_0$, čímž problém převedeme opět na otázku závislosti na počáteční podmínce.

Poznámka. Řešicí funkce je zřejmě diferencovatelná vzhledem k t, neboť $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, t_0, x_0) = f(\varphi(t, t_0, x_0), t)$. Označme pro účely následující věty $\frac{\partial}{\partial w}$ derivaci ve směru $w \in \mathbb{R}^n$ dle proměnné x_0.

Věta 4.3. Nechť $f \in C \cap C^1_x(\Omega)$. Potom existuje $\frac{\partial\varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ všude v $\mathcal{D}$. Označíme-li $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$, pak $u(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ je řešením „rovnice ve variacích“

$$u' = \nabla_x f(x(t), t)u, \qquad u(t_0) = w \tag{4.1}$$

Důsledky. Za uvedených předpokladů dokonce $\frac{\partial\varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ závisí spojitě na x_0, tj. řešicí funkce je diferencovatelná (má totální diferenciál) vzhledem k x_0. Lze též ukázat, že φ je diferencovatelná vůči t_0.
Obecněji, je-li $f \in C^k_x$, je $\varphi \in C^k_{x_0}$. Za příslušných předpokladů je řešicí funkce diferencovatelná též vůči parametrům p_0; viz poznámku za Větou 4.2.

5 Lineární rovnice.

Definice. Lineární rovnicí rozumíme

$$x' = A(t)x + g(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{5.1}$$

kde $A(t) : (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $g(t) : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité.

Věta 5.1. Nechť $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je dáno. Pak existuje jediné řešení rovnice (5.1), definované na celém (a,b).

Poznámka. Podstatný rys lineárních rovnic : *globální* existence řešení, tj. na oboru spojitosti $A(t)$, $g(t)$. Ve skutečnosti platí i pro nelineární rovnice $x' = f(x,t)$ se sublineární pravou stranou, tj. pokud $|f(x,t)| \leq a(t)|x| + g(t)$, kde $a(\cdot)$, $g(\cdot)$ jsou spojité.

Definice. Homogenní rovnicí rozumíme (5.1) pro $g(t) \equiv 0$, tj.

$$x' = A(t)x, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{5.2}$$

Věta 5.2. Množina $\mathcal{R}_H$ řešení homogenní rovnice (5.2) tvoří n-dimenzionální podprostor $C^1((a,b),\mathbb{R}^n)$.

Definice. Fundamentálním systémem (f.s.) pro (5.2) rozumíme libovolnou bázi $\mathcal{R}_H$. Matice, jejíž sloupce tvoří prvky libovolného fundamentální systému, nazýváme fundamentální maticí (f.m.) pro (5.2).

Poznámka. Je-li $\Phi(t)$ nějaká f.m. pak:

- $\Phi(t)$ splňuje „maticový tvar (5.2)“, tj. $\Phi' = A(t)\Phi$
- $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (a,b)$
- obecné řešení (5.2) má tvar $\Phi(t)c$, kde $c \in \mathbb{R}^n$ (sloupcový vektor)
- $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ je také f.m., navíc splňující $\tilde{\Phi}(t_0) = I$.

Věta 5.3. [Variace konstant.] Nechť $\Phi(t)$ je libovolná f.m. pro (5.2). Potom řešení rovnice (5.1) lze napsat ve tvaru

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds, \qquad t \in (a,b).$$

Věta 5.4. [Liouvilleova formule.] Nechť $\Phi(t)$ je maticové řešení (5.2), nechť $w(t) = \det\Phi(t)$. Potom

$$w(t) = w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s)ds\right)$$

kde $\operatorname{tr} A$ je stopa matice A.

Poznámka. Nechť $\varphi(t,x_0)$ je řešicí funkce autonomní rovnice $x = f(x)$, $x(0) = x_0$. Je-li $f \in C^1$, je $\varphi(t,\cdot)$ (lokálně) difeomorfismus ($\varphi_{-1}(t,\cdot) = \varphi(-t,\cdot)$). Z věty o substituci a předchozí věty vyplývá

$$\lambda_n(\varphi(t,A)) = \int_A \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}_x f(\varphi(u,s))ds\right) du$$

kde $\operatorname{div} f = \operatorname{tr}\nabla f$. Speciálně : je-li $\operatorname{div} f = 0$, pak $\varphi(t,\cdot)$ zachovává objem množin.

6 Lineární rovnice s konstantními koeficienty.

Definice. Normu matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme

$$\|A\| = \sup\big\{|Ax|;\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \le 1\big\}$$

Připomeňme, že $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ je absolutní hodnota (,,norma“) vektoru $x \in \mathbb{R}^n$.

Věta 6.1. [Vlastnosti normy matice.] Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom :

(i) $\|A\| \ge 0$, a $\|A\| = 0$ právě když $A = 0$

(ii) $\|aA\| = |a|\|A\|$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$

(iii) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

(iv) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

(v) $|Ax| \le \|A\||x|$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(vi) je-li A regulární, pak $|Ay| \ge |y|/\|A^{-1}\|$ pro $\forall y \in \mathbb{R}^n$

Poznámky. Lze zavést jiné (nutně ekvivalentní) normy matice, např.

$$\|A\|_\infty = \max\{[A]_{ij};\ 1 \le i, j \le n\}$$

kde $[A]_{ij}$ značí prvek ij matice A. Výhoda výše uvedené normy je ve vlastnostech (iv-vi) Věty 6.1, které např. pro normu $\|A\|_\infty$ neplatí (resp. platí až na vhodnou konstantu).
Často (a mlčky) užívaná úvaha : $A_n \to A$ v normě, právě když $[A_n]_{ij} \to [A]_{ij}$ pro každé ij. Podobně (tj. po složkách) lze ekvivalentně nahlížet na další ,,limitní“ operace maticových funkcí (derivace, integrál, součet řady).

Definice. Maticovou exponenciálu definujeme předpisem $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (s konvencí $A^0 = I$).

Poznámka. Řada konverguje absolutně a platí $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$.

Věta 6.2. Nechť $U(t) = e^{tA}$. Pak $U(t)$ je fundamentální matice rovnice

$$x' = Ax, \tag{6.1}$$

a platí $U(0) = I$.

Věta 6.3. [Vlastnosti maticové exponenciály.]

(i) $e^{aI} = e^a I$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$

(ii) pokud $AB = BA$, pak $e^{A+B} = e^A e^B$

(iii) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1} e^A C$

(iv) $e^{-A} = \big(e^A\big)^{-1}$; speciálně e^A je vždy regulární

Poznámka. [Výpočet e^{tA} v praxi.] Pro nilpotentní A (tj. $A^m = 0$ pro nějaké $m \ge 1$) snadno z definice. O obecném případě (vzhledem k bodu (iii) Věty 6.3.) stačí uvažovat Jordanovu buňku $J = aI + L$, kde L (nulová až na 1 nad diagonálou) je zjevně nilpotentní. Tedy (body (i-ii) Věty 6.3.) $\exp tJ = e^{at} P(t)$, kde $P(t)$ je tvořena polynomy stupně $< n$ nad jednotkovou diagonálou. Platí $P^{-1}(t) = P(-t)$ a $\|P(t)\| \sim (1 + |t|^m)$.

Věta 6.4. [Variace konstant pro (6.2).] Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $g(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, $t_0 \in (a, b)$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jsou dána. Potom řešení rovnice

$$x' = Ax + g(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{6.2}$$

má tvar
$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}g(s)ds, \qquad t \in (a,b)$$

Definice. Pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ značí $\sigma(A)$ spektrum matice a definujeme $\sigma_-(A) = \sigma(A) \cap \{\mathrm{Re} < 0\}$, $\sigma_0(A) = \sigma(A) \cap \{\mathrm{Re} = 0\}$, $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap \{\mathrm{Re} > 0\}$. Prostory generované příslušnými (zobecněnými) vlastními vektory značíme $X_-(A)$, $X_+(A)$, $X_0(A)$ (nazýváme je stabilní, nestabilní a centrální podprostor). Zřejmě $\mathbb{R}^n = X_+(A) \oplus X_+(A) \oplus X_0(A)$. Tyto prostory jsou invariantní vzhledem k A a též vzhledem k e^{tA}.

Věta 6.5. [Asymptotické chování řešení (6.1).] Nechť A je daná matice. Potom existují α, β, M a $c > 0$ takové, že pro každé $t \geq 0$ platí:

1. (stabilní podprostor) $x_0 \in X_-(A) \implies |e^{tA}x_0| \leq ce^{-\alpha t}|x_0|$
2. (nestabilní podprostor) $x_0 \in X_+(A) \implies |e^{tA}x_0| \geq c^{-1}e^{\beta t}|x_0|$
3. (centrální podprostor) $x_0 \in X_0(A) \implies c^{-1}(1+t)^{-M}|x_0| \leq |e^{tA}x_0| \leq c(1+t)^M|x_0|$

Poznámka. Uvedené vlastnosti prostory $X_-(A)$, $X_+(A)$ a $X_0(A)$ *charakterizují.* Pro $t \leq 0$ platí zrcadlové odhady: exponenciální růst na $X_-(A)$, exponenciální pokles na $X_+(A)$, polynomiální chování na $X_0(A)$.

7 Stabilita.

Poznámka. Lemma 4.1 *teoreticky* tvrdí spojitost řešení vůči x_0, *prakticky* však (pro větší t) nemá vzhledem k exponenciálnímu odhadu význam. To nás vede ke zkoumání okolností, za nichž existují odhady, které se nezhoršují pro $t \to \infty$.

Definice. Nechť $f = f(x,t)$ je spojitá v otevřené $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a navíc lokálně lipschitzovská vůči x. Nechť $\Omega \supset \{0\} \times I$, kde $I = (\tau, \infty)$, a nechť $f(0,t) = 0$ pro $\forall t \in I$.
Řekneme, že nulové řešení rovnice je

(i) *stabilní*, jestliže $\forall t_0 \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $|x_0| < \delta$ implikuje, že $\varphi(t,t_0,x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t,t_0,x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0$

(ii) *nestabilní*, jestliže není stabilní

(iii) *lokální atraktor*, jestliže $\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0$ tak, že $|x_0| < \eta$ implikuje, že $\varphi(t,t_0,x_0)$ je definováno $\forall t \geq t_0$ a navíc $\varphi(t,t_0,x_0) \to 0$ pro $t \to +\infty$

(iv) *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc lokální atraktor

(v) *uniformně stabilní*, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t_0 \in I$ tak, že $|x_0| < \delta$ implikuje, že $\varphi(t,t_0,x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t,t_0,x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0$

(vi) *uniformně asymptoticky stabilní*, jestliže je uniformně stabilní a navíc $\exists \eta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists T > 0\ \forall t_0 \in I$ $|x_0| < \eta$ implikuje, že $\varphi(t,t_0,x_0)$ je definováno pro všechna $t \geq t_0$ a $|\varphi(t,t_0,x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall t \geq t_0 + T$

Poznámky. Z Věty 4.2 víme, že řešicí funkce je spojitá. Vlastnost (i) říká, že spojitost φ vůči x_0 je stejnoměrná vzhledem k (tj. δ lze volit nezávisle na) $t \geq t_0$. Termín *uniformní* značí navíc stejnoměrnost této spojitosti i vůči $t_0 \in I$. V případě autonomní rovnice však je (asymptotická) stabilita totéž co (asymptotická) uniformní stabilita, neboť $\varphi(t,t_0,x_0) = \varphi(t-t_0,0,x_0)$.
Poznamenejme, že (iii) obecně neimplikuje (i) – Vinogradovův protipříklad.
Obecněji, řešení $\tilde{x}(t)$ rovnice $x' = f(x,t)$ se nazve stabilní (resp. uniformně stabilní, atd.), jestliže řešení nulové řešení rovnice $u' = g(u,t)$, kde $g(u,t) = f(\tilde{x}(t)+u,t) - f(\tilde{x}(t),t)$ má analogickou vlastnost. V případě lineární rovnice (5.1), tj.
$$x' = A(t)x + g(t)$$

je stabilita (libovolného) řešení ekvivalentní stabilitě nulového řešení příslušné homogenní úlohy, tj. (5.1).

Věta 7.1. Je dána rovnice $x' = A(t)x$, kde $A(t)$ je spojitá v $I = (\tau, \infty)$. Nechť $\Phi(t)$ je (libovolná) fundamentální matice. Potom nulové řešení je

1. stabilní, právě když pro $\forall t_0 \in I$ je $\|\Phi(t)\|$ omezená v $[t_0, \infty)$
2. asymptoticky stabilní, právě když $\|\Phi(t)\| \to 0$ pro $t \to \infty$
3. uniformně stabilní, právě když $\exists c > 0\ \forall s < t \in I$ je $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq c$
4. a konečně je uniformně asymptoticky stabilní, právě když $\exists \alpha,\ c > 0\ \forall s < t \in I$ platí $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq ce^{-\alpha(t-s)}$

Terminologie. Pro vlastní číslo λ_0 matice A rozlišujeme *algebraickou násobnost* (tj. kolikanásobným kořenem $\det(\lambda I - A)$ číslo λ_0 je) a naproti tomu *geometrickou násobnost* (tj. kolik lineárně nezávislých řešení rovnice $(\lambda_0 I - A)u = 0$ existuje).
Geometrická násobnost je obecně menší nebo rovna algebraické násobnosti. Pokud jsou si rovny, hovoříme o *polojednoduchém* vlastním čísle. Vlastní číslo je polojednoduché, právě když k němu nepřísluší žádné (netriviální) Jordanovy buňky, což jest právě když je A na příslušném vlastním podprostoru diagonalizovatelná.

Věta 7.2. Nechť A je konstantní matice. Potom nulové řešení rovnice $x' = Ax$ je

1. (uniformně) stabilní, právě když: $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$, přičemž $\operatorname{Re}\lambda = 0$ pouze pro polojednoduchá vlastní čísla
2. (uniformně) asymptoticky stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$

Lemma 7.1. Je dána rovnice $x' = Ax + r(x,t)$. Nechť existují $c,\ \alpha > 0$ tak, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-t\alpha}$ pro $\forall t \geq 0$; nechť $r(x,t) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a $|r(x,t)| \leq \gamma|x|$ pro $\forall x, t$, kde $\gamma < \alpha/c$.
Pak každé řešení splňuje $|x(t)| \leq c|x(t_0)| \exp(-\beta(t - t_0))$, pro $t \geq t_0$, kde $\beta = \alpha - c\gamma > 0$.
Speciálně: nulové řešení je (uniformně) asymptoticky stabilní.

Poznámka. Matice A se nazve Hurwitzovská, jestliže $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$. Z Věty 6.5 vidíme, že A splní předpoklady předchozího Lemmatu 7.1, právě když je Hurwitzovská. Navíc α lze volit libovolné takové, že $\operatorname{Re}\lambda < -\alpha$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

Věta 7.3. [O linearizované stabilitě.] Je dána rovnice $x' = f(x)$. Nechť $f(x_0) = 0$, $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 a nechť $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$, kde $A = \nabla f(x_0)$. Potom x_0 je (uniformně) asymptoticky stabilní.

Věta 7.4. [O linearizované nestabilitě.] Je dána rovnice $x' = f(x)$. Nechť $f(x_0) = 0$, $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 a nechť existuje $\lambda \in \sigma(A)$, kde $A = \nabla f(x_0)$ takové, že $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Potom x_0 je nestabilní.

Poznámka. Předchozí věty nepokrývají případ, kdy $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ pro $\lambda \in \sigma(A)$, přičemž alespoň pro jedno λ nastává rovnost. Za těchto okolností nelze obecně o stabilitě rozhodnout pouze na základě vlastností A; mezi stabilitou rovnice $x' = f(x)$ a stabilitou „linearizované“ rovnice $x' = Ax$ obecně není souvislost.

Definice. Nechť $f(x)$ je C^1 na okolí x_0. Nechť $f(x_0) = 0$ a nechť $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$. Potom x_0 nazýváme *hyperbolický* stacionární bod rovnice $x' = f(x)$.

Věta 7.5.[1][Hartman-Grobmanova věta]. Nechť x_0 je hyperbolický stacionární bod rovnice $x' = f(x)$. Potom existuje homeomorfismus, převádějící řešení této rovnice na řešení rovnice $x' = Ax$, kde $A = \nabla f(x_0)$.

[1] Bez důkazu.

8 První integrál.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Funkce $U : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazve *první integrál* rovnice

$$x' = f(x) \tag{8.1}$$

v Ω, jestliže :

1. U je třídy C^1 a *nekonstantní* v Ω
2. $t \mapsto U(x(t))$ je konstantní, pokud $x(t)$ je libovolné řešení (8.1) v Ω

Poznámka. Fyzikální význam: zachovávající se veličina (energie). Geometrický význam: řešení (8.1) tvoří ,,vrstevnice" grafu U.

Věta 8.1. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, $V : \Omega \to \mathbb{R}$ je C^1. Potom je ekvivalentní:
(i) pro každé $x(t)$ řešení rovnice (1.1) v Ω je $t \mapsto V(x(t), t)$ konstantní
(ii) $\partial_t V(x, t) + \nabla_x V(x, t) \cdot f(x, t) = 0$ pro každý bod $(x, t) \in \Omega$

Definice. Výraz $\partial_t V(x, t) + \nabla_x V(x, t) \cdot f(x, t)$ podrobně zapsáno

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j}(x,t) f_j(x,t)$$

nazýváme *orbitální derivací* funkce V vzhledem k rovnici (1.1). Značíme $\dot{V}_f$. Je-li $x(t)$ libovolné řešení (1.1), pak $\frac{d}{dt} V(x(t), t) = \dot{V}_f(x(t), t)$.

Definice. Funkce $U_j(x)$ třídy C^1 nazveme *nezávislé* v bodě x_0, jestliže matice $\left\{\frac{\partial U_j}{\partial x_i}(x_0)\right\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$ má hodnost k.
Ekvivalentně: vektory $\nabla U_j(x_0) \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé.

Poznámka. Zřejmě existuje nejvýše n funkcí, jež jsou nezávislé v daném bodě. Pokud tyto funkce jsou zároveň první integrály rovnice (8.1), přičemž x_0 není stacionární bod, pak existuje nejvýše $n - 1$ takových funkcí.

Věta 8.2. Nechť jsou dány první integrály $U_1, \dots, U_k$ rovnice (8.1), které jsou nezávislé v bodě x_0. Potom (8.1) lze v jistém okolí x_0 redukovat na soustavu $n - k$ (diferenciálních) rovnic.

Věta 8.3. Nechť $f(x)$ je C^1 na okolí x_0, a nechť $f(x_0) \neq 0$. Potom rovnice (8.1) má $n - 1$ prvních integrálů, které jsou nezávislé v bodě x_0.

Poznámka. Kombinace Vět 8.1 a 8.3 zaručuje (lokální) existenci řešení PDR 1. řádu

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} f_i(x) = 0$$

pro neznámou funkci $U = U(x)$. Mírnou adaptací důkazu lze získat (na jistém okolí $x_0 \in \Omega$) řešení obecnější rovnice

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_j} f_j(x, U) + g(x, U) = 0$$

s předepsanou hodnotou na libovolné C^1 nadploše Γ za předpokladu, že $f(x_0)$ není tečný směr ke Γ v bodě x_0. Tento postup se nazývá *metoda charakteristik*.

9 Rovnice vyššího řádu.

Definice. Rovnicí n-tého řádu rozumíme

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{9.1}$$

s počátečními podmínkami

$$y(t_0) = \xi_1,\ y'(t_0) = \xi_2,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = \xi_n \tag{9.2}$$

Řešením rozumíme funkci třídy C^n, vyhovující (9.1–9.2) na nějakém otevřeném intervalu.

Pozorování. [D'Alembertova transformace.] Funkce $y(t)$ je řešením (9.1–9.2), právě když (vektorová) funkce $x(t)$, kde

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = y'(t),\ \dots,\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \tag{9.3}$$

je řešením soustavy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = \xi$, kde

$$f_1(t, x) = x_2,\ f_2(t, x) = x_3,\ \dots,\ f_{n-1}(t, x) = x_n,\ f_n(t, x) = g(t, x) \tag{9.4}$$

Věta 9.1. Nechť $g(t, y)$ je spojitá na okolí bodu $(t_0, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Potom existuje $\delta > 0$ a funkce $y(t) : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, řešení (9.1–9.2).

Věta 9.2. Je-li navíc $g(t, y)$ lokálně lipschitzovská vůči x, je řešení jednoznačně určeno a spojitě závisí na počáteční podmínce (tj. malá změna t, t_0 a ξ implikuje malou změnu $y(t)$, $y'(t)$, …,$y^{(n-1)}(t)$).

Definice. Lineární ODR řádu n rozumíme

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t) y^{(n-j)} = h(t) \tag{9.5}$$

Věta 9.3. Nechť $t_0 \in (a, b)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$; nechť $a_j(t)$, $h(t)$ jsou spojité, navíc $a_0(t) \neq 0$ v (a, b). Potom existuje jediné $y \in C^n(a, b)$ řešení (9.5), splňující (9.2).

Věta 9.4. Nechť $a_j(t)$ splňují předpoklady předchozí věty. Potom řešení homogenní úlohy

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t) y^{(n-j)} = 0 \tag{9.6}$$

(tj. (9.5) pro $h(t) = 0$) tvoří lineární podprostor $C^n(a, b)$ dimenze n.

Lemma 9.1.[2] Nechť $F(t) = \int_{t_0}^{t} \phi(t, s) ds$, kde t_0 je pevné a $\phi(t, s)$ je C^1 funkce. Potom $F(t)$ je diferencovatelná a platí

$$F'(t) = \phi(t, t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, s) ds$$

Věta 9.5. [Variace konstant pro rovnici n-tého řádu.] Nechť pro $s \in (a, b)$ značí $\phi(t, s) = y(t)$, kde $y(t)$ je řešení homogenní úlohy s počáteční podmínkou $y^{(j)}(s) = 0$, $j = 0, \dots, n-2$ a $y^{(n-1)}(s) = 1/a_0(s)$. Potom funkce

$$y_p(t) := \int_{t_0}^{t} \phi(t, s) h(s) ds$$

řeší rovnici (9.5) s počáteční podmínkou $y_p^{(j)}(t_0) = 0$, $j = 0, \dots, n-1$.

[2] Bez důkazu.

10 Stabilita podruhé.

V této kapitole studujeme opět obecnou rovnici (1.1), tj.

$$x' = f(x,t)$$

za trvalých předpokladů: $f(x,t) : \mathcal{O} \times I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina obsahující 0 a $I = (\tau, \infty)$. Předpokládáme $f(0,t) = 0$ pro $\forall t \in I$, tj. $x(t) = 0$ je řešení v I, o jehož stabilitu půjde.

Definice. Funkce $\omega(x) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ se nazve *pozitivně definitní*, jestliže je spojitá, $\omega(0) = 0$ a $\omega(x) > 0$ pro $\forall x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$.

Definice. Funkce $V(x,t) : \mathcal{O} \times I \to \mathbb{R}$ se nazve *Ljapunovská funkce* rovnice (1.1) pro bod 0, jestliže:

(i) $V(x,t)$ je spojitá, nezáporná a $V(0,t) = 0$ pro $\forall t \in I$

(ii) funkce $t \mapsto V(x(t),t)$ je nerostoucí pro každé $x(t)$ řešení (1.1) v $\mathcal{O} \times I$

(iii) existuje pozitivně definitní funkce $\omega(x)$ v $\mathcal{O}$ taková, že $V(x,t) \geq \omega(x)$ pro každý bod $(x,t) \in \mathcal{O} \times I$

Poznámka. Je-li $V(x,t)$ třídy C^1, je podmínka (ii) výše ekvivalentní nekladnosti orbitální derivace, tj.

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) + \nabla_x V(x,t) \cdot f(x,t) \leq 0 \qquad \forall\ (x,t) \in \mathcal{O} \times I$$

Důkaz je analogický Větě 8.1. Podobně podmínka (v) ve Větě 10.2 níže je ekvivalentní

$$\dot{V}_f(x,t) \leq -\eta(x)\,,$$

pro všechny body $(x,t) \in \mathcal{O} \times I$.

Věta 10.1. Nechť rovnice (1.1) má Ljapunovskou funkci pro bod 0. Potom nulové řešení je stabilní v I.

Lemma 10.1. Nechť $\omega(x)$ je pozitivně definitní v $\mathcal{O}$, nechť $x_n \in \overline{U(0,\varepsilon)} \subset \mathcal{O}$, nechť $\omega(x_n) \to 0$. Potom $x_n \to 0$.

Věta 10.2. Nechť rovnice (1.1) má Ljapunovskou funkci $V(x,t)$ v $\mathcal{O} \times I$. Nechť navíc existují funkce $\lambda(x)$ a $\eta(x)$ pozitivně definitní v $\mathcal{O}$ takové, že:

(iv) $V(x,t) \leq \lambda(x)$ pro každý bod $\forall (x,t) \in \mathcal{O} \times I$

(v) $\frac{d}{dt} V(x(t),t) \leq -\eta(x(t))$ každé $x(t)$ řešení (1.1) v $\mathcal{O} \times I$

Potom 0 je asymptoticky stabilní v I.

Věta 10.3. Je dána rovnice $x' = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Následující výroky jsou ekvivalentní:

1. 0 je asymptoticky stabilní v $[0, \infty)$.
2. $\operatorname{Re} \lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$, neboli A je Hurwitzovská
3. existují α, $c > 0$ tak, že $\|e^{tA}\| \leq c e^{-\alpha t}$ pro $\forall t \geq 0$
4. existuje symetrická, pozitivně definitní $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že

$$A^T B + BA = -I$$

Poznámka. Poslední rovnost se nazývá *Ljapunovova rovnice*. Z bodu (4) plyne, že $V(x) = x \cdot Bx$ je Ljapunovskou funkcí rovnice $x' = Ax$. Pomocí této Ljapunovské funkce lze také dokázat Větu 7.3 (o linearizované stabilitě).

11 Šturmova srovnávací věta.

V této kapitole se budeme zabývat lineární homogenní rovnicí 2. řádu

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{11.1}$$

kde $a_j(t)$ jsou spojité, navíc $a_0(t) \neq 0$ v intervalu $I = (\alpha, \beta)$. Podle Věty 9.3 je řešení jednoznačně určeno hodnotami $x(t_0)$ a $x'(t_0)$ v předepsaném t_0 a je třídy $C^2(I)$.
Budeme se zabývat problémem rozložení nulových bodů (netriviálních) řešení této rovnice.

Lemma 11.1. Nechť $x(t)$ je *netriviální* řešení rovnice (11.1), $t_0 \in I$.

(i) je-li $x(t_0) = 0$, je $x'(t_0) \neq 0$

(ii) je-li $x(t_0) = 0$ a $y(t)$ je jiné řešení, též splňující $y(t_0) = 0$, pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $y(t) = \lambda x(t)$ pro $\forall t \in I$

(iii) množina $N(x) = \{t \in I;\ x(t) = 0\}$ nulových bodů nemá v I hromadný bod

Důsledky. Každý kompaktní interval $[a, b] \subset I$ obsahuje nejvýše konečně prvků $N(x)$. Má tedy smysl hovořit o nejbližším větším/menším („sousedním“) nulovém bodě. ($N(x)$ může být nekonečná s hromadnými body α či β.)

Lemma 11.2. Rovnice (11.1) je vzájemně převoditelná na tvar

$$\big(p(t)x'\big)' + q(t)x = 0 \tag{11.2}$$

kde $p(t)$, $p'(t)$ a $q(t)$ jsou spojité v I, navíc $p(t) \neq 0$. Příslušná substituce navíc zachovává nulové body řešení.

Věta 11.1. [Šturmova srovnávací věta.] Nechť $p(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ jsou spojité v I, navíc $p(t) > 0$. Nechť $x(t)$ je *netriviální* řešení rovnice

$$\big(p(t)x'\big)' + q_1(t)x = 0 \tag{11.3}$$

Nechť $y(t)$ je (libovolné) řešení rovnice

$$\big(p(t)y'\big)' + q_2(t)y = 0 \tag{11.4}$$

Nechť $t_1 < t_2$ jsou sousední body $N(x)$ a nechť (klíčový předpoklad) $q_2(t) \geq q_1(t)$ v $[t_1, t_2]$. Potom buď (i) $y(t)$ má v (t_1, t_2) nulový bod, nebo (ii) existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $y(t) = \lambda x(t)$ a $q_1(t) = q_2(t)$ pro $\forall t \in [t_1, t_2]$. Speciálně, $y(t)$ má nulový bod v $[t_1, t_2]$.

Poznámka. Jde o rovnice tvaru $x'' = -q(t)x$, tj. $q(t)$ má význam zpětné vazby (např. tuhost pružiny). Smysl věty je: silnější zpětná vazba $\implies$ více nulových bodů.

Věta 11.2. [Šturmova oddělovací věta.] Nechť $p(t)$, $p'(t)$ a $q(t)$ jsou spojité v I, navíc $p(t) \neq 0$. Nechť $\{u(t), v(t)\}$ je libovolný fundamentální systém rovnice (11.2). Nechť $N(u)$, $N(v)$ jsou nulové body $u(t)$, $v(t)$. Potom $N(u)$, $N(v)$ jsou disjunktní a mezi dvěma sousedními body $N(u)$ leží právě jeden bod $N(v)$.

12 Floquetova teorie.

V této kapitole budeme studovat lineární rovnici

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{12.1}$$

kde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$ jsou spojité a T-periodické v $\mathbb{R}$. Budeme se zabývat otázkou existence periodických řešení a otázkou stability řešení pro (12.1).

Poznámky. Pro danou počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$ podle Věty 5.1 existuje právě jedno řešení v $\mathbb{R}$. Je-li $x(t)$ řešení, je také $y(t) := x(t + T)$ řešení. Řešení $x(t)$ je T-periodické, právě když $x(T) = x(0)$.

Lemma 12.1.[3] Nechť A je regulární matice. Pak existuje matice B (obecně komplexní a ne jednoznačně určená) taková, že $e^B = A$.

Věta 12.1. [Floquetova.] Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice úlohy (12.1), nechť navíc $\Phi(0) = I$. Potom existuje regulární a vzhledem k času spojitá, T-periodická matice $Q(t)$ a dále (konstantní) matice B takové, že $\Phi(t) = Q(t)e^{tB}$.

Poznámka. Tzv. Floquetova transformace $x = Q(t)y$ převádí rovnici

$$x' = A(t)x \tag{12.2}$$

na rovnici s konstantními koeficienty $y' = By$. Matice $C = \Phi(T) = e^{TB}$ se nazývá *matice monodromie*. Tato matice reprezentuje řešicí operátor v čase periody a lze z ní vyčíst mnohé podstatné informace (existence periodických řešení, stabilita, ...).

Věta 12.2. Nechť matice $A(t)$ je spojitá, T-periodická. Potom je ekvivalentní:

1. rovnice (12.1) má pro dané T-periodické $b(t)$ právě jedno T-periodické řešení
2. rovnice (12.2) má pouze triviální T-periodické řešení
3. $1 \notin \sigma(C)$, kde C je matice monodromie

Věta 12.3. Uvažujme homogenní rovnici $x' = A(t)x$. Nechť C je matice monodromie. Potom nulové řešení je:

(i) stabilní, právě když: $|\lambda| \leq 1$ pro každé $\lambda \in \sigma(C)$ a pokud $|\lambda| = 1$, jde o polojednoduché vlastní číslo

(ii) asymptoticky stabilní, právě když $|\lambda| < 1$ pro každé $\lambda \in \sigma(C)$

[3] Bez důkazu.